Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 22/09/2023

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Si consideri una sfera cava di raggi interno ed esterno $a = 1.3$ mm e $b = 2.3$ mm di un materiale di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4.7$. Si considerino i due casi: α) il guscio dielettrico contiene una sfera conduttrice di raggio a; e β) il guscio dielettrico è metallizzato esternamente. In entrambi i casi il conduttore ha una carica $Q = 79$ pC. Per ciascuno dei due casi si determinino:

a) le espressioni del campo elettrico $\mathbf{E}_{\alpha,\beta}(r)$ e del potenziale $\varphi_{\alpha,\beta}(r)$ in tutto lo spazio;

b) le espressioni del vettore densità di polarizzazione $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}(r)$ e delle eventuali cariche di polarizzazione di superficie $\sigma_{\alpha,\beta}(a)$ e $\sigma_{\alpha,\beta}(b)$ e di volume $\rho_{\alpha,\beta}(r)$;

c) i valori della capacità del sistema $C_{\alpha,\beta}$ e della sua energia elettrostatica $U_{\alpha,\beta}$.

Svolgimento:

a)

$$\mathbf{E}_\alpha(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\dfrac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} & a < r < b \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} & b < r \end{cases} \qquad \varphi_\alpha(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left[\dfrac{1}{a}+\dfrac{\chi}{b}\right] = 359 \text{ V} & r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left[\dfrac{1}{r}+\dfrac{\chi}{b}\right] & a < r < b \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r} & b < r \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_\beta(r) = \begin{cases} 0 & r < b \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} & b < r \end{cases} \qquad \varphi_\beta(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{b} = 309 \text{ V} & r < b \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r} & b < r \end{cases}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m e $\chi = \epsilon_r - 1$;

b)

$$\mathbf{P}_\alpha(r) = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_r}\frac{Q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}, \qquad \sigma_\alpha(a) = -\frac{\chi}{4\pi\epsilon_r}\frac{Q}{a^2} = -2.93\ \mu\text{C/m}^2, \qquad \sigma_\alpha(b) = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_r}\frac{Q}{b^2} = 0.936\ \mu\text{C/m}^2,$$

$$P_\beta(r) = \sigma_\beta(a) = \sigma_\beta(b) = 0, \qquad \rho_\alpha(r) = \rho_\beta(r) = 0;$$

c)

$$C_\alpha = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r ab}{\chi a + b} = 0.220 \text{ pF}, \qquad U_\alpha = \frac{Q^2(\chi a + b)}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r ab} = 14.2 \text{ nJ},$$

$$C_\beta = 4\pi\epsilon_0 b = 0.256 \text{ pF}, \qquad U_\beta = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 b} = 12.2 \text{ nJ}.$$

Esercizio 2

Date una spira quadrata di lato $2a$ e una spira circolare di diametro $2a$ percorse dalla stessa corrente I si calcoli:

a) il rapporto $R_0 = B_{\text{quad}}/B_{\text{circ}}$ tra i campi magnetici nel centro delle due spire;

b) il rapporto $R_z = B_{z,\text{quad}}(z)/B_{z,\text{circ}}(z)$ degli andamenti asintotici dei due campi magnetici per $z \gg 2a$;

c) l'espressione della componente radiale del campo magnetico $B_{\rho,\text{circ}}(\rho,z)$ in un intorno dell'asse.

Svolgimento:

a)

$$B_{\text{quad}} = 4\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{a\,dy}{(a^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi a}\left[\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}\right]_{-a}^{a} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}, \qquad B_{\text{circ}} = \frac{\mu_0 I}{2a},$$

$$R_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0.900;$$

b)

$$R_z = \frac{4a^2}{\pi a^2} = \frac{4}{\pi} = 1.27;$$

c) essendo nullo il flusso del campo $\mathbf{B}$ su qualsiasi superficie chiusa, costruiamo una scatoletta gaussiana cilindrica in asse con la spira, di raggio $\rho \ll a$ e altezza Δz. Il flusso attraverso le sue superfici vale

$$0 = \pi\rho^2\Delta B_{z,\text{circ}} + 2\pi\rho\Delta z B_{\rho,\text{circ}} = \pi\rho^2\frac{\partial B_{z,\text{circ}}}{\partial z}\Delta z + 2\pi\rho\Delta z B_{\rho,\text{circ}} \quad\longrightarrow\quad B_{\rho,\text{circ}} = -\frac{\rho}{2}\frac{\partial B_{z,\text{circ}}}{\partial z}$$

ed essendo

$$B_{z,\text{circ}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{(a^2+z^2)^{3/2}}\oint ds = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}, \qquad\longrightarrow\qquad B_{\rho,\text{circ}} = \frac{3}{2}\frac{\mu_0 I\pi a^2 z\rho}{(a^2+z^2)^{5/2}}.$$

Esercizio 3

Al centro di ciascuna delle sei facce di un cubo di lato $a = 8.3$ cm si trova una piccola spira circolare percorsa dalla corrente $I = 2.3$ A. I sei momenti magnetici di intensità $m = 53$ μA·m^2 hanno tutti la direzione della normale esterna alla faccia. Si determini:

a) il raggio R delle spire;

b) l'energia complessiva di interazione U_m delle sei spire;

c) il primo momento di multipolo non nullo della configurazione delle sei spire. Si giustifichi la risposta calcolando il campo magnetico $\mathbf{B} = (B_\rho, B_z)$ sull'asse di una delle spire in un punto a distanza $z \gg a$ dal centro del cubo.

Svolgimento:

a)

$$R = \sqrt{\frac{m}{\pi I}} = 2.71 \text{ mm};$$

b) le posizioni e i momenti magnetici delle sei spire sono, in coordinate cilindriche (ρ, z):

spira	$\mathbf{r}_i$	$\mathbf{m}_i$	$\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_i$	$\lvert\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_i\rvert$
1	$(0,a/2)$	$(0,m)$	–	–
2	$(0,-a/2)$	$(0,-m)$	$(0,a)$	a
$3\to 6$	$(a/2,0)$	$(m,0)$	$(-a/2,a/2)$	$a/\sqrt{2}$

$$U_m = \frac{6}{2}I_1\sum_{i=2}^{6}\Phi(B_i) \approx 3\mathbf{m}_1\cdot[\mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) + 4\,\mathbf{B}_3(\mathbf{r}_1)]$$

dove i campi in $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ sono approssimati da quelli di dipolo

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3[\mathbf{m}_i\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_i)](\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_i) - |\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_i|^2\mathbf{m}_i}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_i|^5}$$

con $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H/m. Si ha quindi

$$U_m = \frac{3\mu_0 m_1}{4\pi}\left(-\frac{2m_2}{a^3} - \frac{3\sqrt{2}\,m_3}{a^3}\right) = -\frac{3\left(2+3\sqrt{2}\right)\mu_0 m^2}{4\pi a^3} = -9.20 \text{ pJ};$$

c) quadrupolo. Infatti ($B_\rho = 0$ per simmetria) le prime due spire contribuiscono a $B_z(z)$ con

$$B_{z,1+2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{2m}{(z-a/2)^3} - \frac{2m}{(z+a/2)^3}\right] \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3ma}{z^4},$$

mentre ciascuna delle altre quattro genera un campo

$$B_{z,3\to 6} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3ma}{2z^4} \qquad \longrightarrow \qquad B_z = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3ma}{z^4}.$$