# Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
# Prova d'esame di Fisica 2 – 25/07/2022

*Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)*

## Esercizio 1

Una corona circolare di raggio interno $a = 2.3$ cm e raggio esterno $b = 4.7$ cm è carica con densità di carica superficiale 1.7 $\mu$C/m$^2$. Sull'asse della corona, all'altezza $z_0 = 9.7$ cm si trova un dipolo $p = 1.3 \times 10^{-13}$ C·m inclinato di un angolo $\alpha_0 = 37°$ rispetto all'asse $z$. Si calcoli:

a) il campo elettrico $\mathbf{E}(z_0)$ alla posizione del dipolo;

b) il potenziale $\varphi_0(z_0)$ supponendo $\varphi_0(\infty) = 0$; si calcoli poi il potenziale $\varphi_1(z_0)$ per il quale $\varphi_1(0) = 0$;

c) si scriva l'espressione della forza $\mathbf{F}$ che agisce sul dipolo e (*facoltativamente*) se ne calcoli il valore.

Svolgimento:

a)

$$E_z(z_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{z_0}{\sqrt{r^2+z_0^2}}\frac{2\pi r\sigma\, dr}{r^2+z_0^2} = \frac{\sigma z_0}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+z_0^2}}\right] = 7.02 \text{ kV/m}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

b)

$$\varphi_0(z_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{2\pi r\sigma\, dr}{\sqrt{r^2+z_0^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{b^2+z_0^2} - \sqrt{a^2+z_0^2}\right] = 778 \text{ V};$$

$$\varphi_1(z_0) = \varphi_0(z_0) - \varphi_0(0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{b^2+z_0^2} - \sqrt{a^2+z_0^2} + a - b\right] = -1.53 \text{ kV};$$

c) usiamo un sistema di riferimento in cui $\mathbf{p} = (p_x, 0, p_z) = p\ (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\cdot\vec{\nabla})\mathbf{E} = \left(p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{E} = p\left(\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathbf{E}$$

Evidentemente

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{a^2}{(a^2+z_0^2)^{3/2}} - \frac{b^2}{(b^2+z_0^2)^{3/2}}\right] \qquad \longrightarrow \qquad F_z = -1.51 \times 10^{-10} \text{ N}.$$

Per trovare la componente trasversa della forza scriviamo il teorema di Gauss per i punti dell'asse $z$ in coordinate cilindriche:

$$0 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{dr} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{E_r}{r} = -\frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Questa equazione differenziale ha soluzione

$$E_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{r\sigma}{4\epsilon_0}\left[\frac{b^2}{(b^2+z_0^2)^{3/2}} - \frac{a^2}{(a^2+z_0^2)^{3/2}}\right].$$

Sull'asse si ha quindi

$$\frac{\partial E_r}{\partial r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\left[\frac{b^2}{(b^2+z_0^2)^{3/2}} - \frac{a^2}{(a^2+z_0^2)^{3/2}}\right] \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial E_r}{\partial z} = 0.$$

In definitiva

$$F_x = p\sin\alpha\frac{\partial E_r}{\partial r} = 5.71 \times 10^{-11} \text{ N} \qquad \text{e} \qquad F = 1.62 \times 10^{-10} \text{ N}.$$

## Esercizio 2

Una corona circolare di raggio interno $a = 2.3$ cm e raggio esterno $b = 4.7$ cm, carica con densità di carica superficiale $1.7\ \mu\text{C/m}^2$ ruota attorno al proprio asse con velocità angolare $\omega = 0.13$ krad/s. Si calcoli:

a) il campo magnetico $\mathbf{B}_0$ nel centro della corona;

b) il potenziale vettore $\mathbf{A}(z_0)$ sull'asse della corona nel punto $\mathbf{r}_0 = (0, 0, z_0)$ con $z_0 = 9.7$ cm;

c) il potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)$ nel punto $\mathbf{r}_1 = (19, -31, 53)$ cm.

Svolgimento:

a)

$$B_{0z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_a^b \frac{2\pi r\, \omega\sigma r\, dr}{r^2} = \frac{\mu_0}{2}\omega\sigma(b-a) = 3.33 \times 10^{-12}\ \text{T};$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

b)

$$\mathbf{A}(z_0) = 0;$$

c) il momento magnetico della corona è

$$m_z = \int_a^b \pi r^2\, \frac{\omega}{2\pi}\, \sigma\, 2\pi r\, dr = \frac{\pi\omega\sigma}{4}\,(b^4 - a^4),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\, \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} = (9.32, 5.71, 0.00) \times 10^{-17}\ \text{T} \cdot \text{m}.$$

## Esercizio 3

Un conduttore di resistività $\rho = 8.5 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot$m ha forma di una corona circolare di raggio interno $a = 2.3$ cm, raggio esterno $b = 4.7$ cm e spessore $\delta = .79$ mm. Il conduttore è immerso in un campo magnetico uniforme perpendicolare al piano del conduttore e variabile secondo la legge $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0\, e^{-t/\tau}$ con $\tau = 0.31$ s e $B_0 = 2.8$ T per $t \geq 0$. Si calcolino:

a) il massimo valore del campo elettrico $E_{\max}(t_{\max}, \mathbf{r}_{\max})$ all'interno del materiale, l'istante $t_{\max}$ e la posizione $\mathbf{r}_{\max}$ in cui si presenta;

b) l'espressione della densità volumica $w(t, \mathbf{r})$ della potenza dissipata nel materiale al tempo $t$ alla generica posizione $\mathbf{r}$;

c) l'energia $U_J$ complessivamente dissipata nella corona circolare tra $t = 0$ e $t = \infty$;

Svolgimento:

a)

$$\oint_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma(\Gamma)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \qquad \longrightarrow \qquad E(t, r) = \frac{B(t, r) r}{2\tau}$$

e quindi

$$t_{\max} = 0, \qquad r_{\max} = b, \qquad E_{\max} = \frac{B_0 b}{2\tau} = 212\ \text{mV/m};$$

b)

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}(t, \mathbf{r})}{\rho} \qquad \longrightarrow \qquad w(t, \mathbf{r}) = \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{B_0^2 r^2 e^{-2t/\tau}}{4\tau^2\rho};$$

c)

$$U_J = \int_0^\infty dt \int_a^b w\, \delta\, 2\pi r\, dr = \frac{B_0^2 \pi (b^4 - a^4)\delta}{16\tau\rho} = 212\ \text{mJ}.$$