Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 24/02/2023

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Un condensatore piano è costituito da due lastre metalliche quadrate di lato $a = 7.3$ cm mantenute parallele a distanza $x = 1.3$ mm e in posizione verticale. Il bordo inferiore delle lastre sfiora la superficie libera di una vasca piena di olio per trasformatori di densità $\rho = 0.83$ kg/L e costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 5.3$. Trascurando gli effetti di bordo, si calcoli:

a) il valore della capacità C_0 del condensatore scarico e vuoto e l'espressione della capacità C_z del condensatore carico e pieno di liquido fino all'altezza $z < a$;

b) l'altezza z_0 del liquido statico nel condensatore carico alla differenza di potenziale $V_0 = 6.7$ kV;

c) la differenza ΔU tra l'energia immagazzinata, alla tensione V_0, nel condensatore con il liquido e in quello vuoto.

Svolgimento:

a)

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 a^2}{x} = 36.3 \text{ pF}, \qquad C_z = \frac{\epsilon_0 a[(\epsilon_r - 1)z + a]}{x},$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

b) all'equilibrio, la forza con la quale il liquido è risucchiato all'interno del condensatore uguaglia il peso della colonna di liquido:

$$F_z = \frac{V_0^2}{2}\frac{dC_z}{dz} = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)V_0^2 a}{2x} = \rho a z_0 x g \qquad \longrightarrow \qquad z_0 = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)V_0^2}{2\rho g x^2} = 6.21 \text{ cm}$$

dove $g = 9.81$ m/s^2;

c)

$$\Delta U = \frac{1}{2}(C_{z_0} - C_0)V_0^2 = \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)a z_0}{2x}V_0^2 = \rho a x z_0^2\, g = 2.98 \text{ mJ}.$$

Esercizio 2

Per un dipolo magnetico $\mathbf{m}_0$

a) si scriva l'espressione del campo magnetico $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ da esso generato a distanza $\mathbf{r}$;

b) si scriva l'espressione dell'energia magnetostatica $U_{\mathrm{m,ext}}$ contenuta nello spazio esterno ad una superficie sferica di raggio r_0 con centro alla posizione del dipolo.

c) Sapendo che l'elettrone ha un momento magnetico di spin $m_s = e\hbar/2m_e$ ($\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J·s), quale risulterebbe essere il raggio r_0 dell'elettrone se la sua energia magnetostatica $U_{\mathrm{m,ext}}$ fosse pari all'energia $m_e c^2$ della particella a riposo?

Svolgimento:

a)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}_0}{r^5}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

b)

$$U_{\mathrm{m,ext}} = \frac{1}{2\mu_0}\int_{r>r_0} B^2\, dV = \frac{\mu_0 m_0^2}{16\pi}\int_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^4}\int_0^{\pi}(3\cos^2\theta + 1)\sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 m_0^2}{12\pi r_0^3}.$$

c)

$$r_0 = \left[\frac{\mu_0 e^2 \hbar^2}{48\pi m_e^3 c^2}\right]^{1/3} = 32.6 \text{ fm}$$

dove $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C, $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg e $c = 3.00 \times 10^8$ m/s.

Esercizio 3

Un tubo cilindrico di rame di raggio $r_0 = 2.9$ cm, lunghezza $\Delta z = 17$ cm, spessore $\delta = 1.1$ mm è immerso in un campo magnetico oscillante parallelo all'asse del cilindro $B_z = B_0 \cos\omega t$ con $B_0 = 41$ mT e $\omega = 314$ rad/s. Trascurando gli effetti di bordo si scriva:

a) l'equazione alla quale risponde la corrente $I(t)$ che scorre nella parete del tubo, determinando il valore delle costanti che vi figurano;

b) l'espressione della corrente $I(t)$, determinando i valori dell'ampiezza I_0 e della fase ϕ rispetto al campo;

c) la potenza efficace P_{eff} dissipata nel tubo.

Svolgimento:

a)

$$\mathcal{E}_{\text{Faraday}} - L\frac{dI}{dt} = RI, \qquad \mathcal{E}_{\text{Faraday}} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}\pi r_0^2 = \omega B_0 \pi r_0^2 \sin\omega t = \mathcal{E}_0 \sin\omega t,$$

$$\mathcal{E}_0 = 34.0 \text{ mV}, \qquad L = \frac{\mu_0 \pi r_0^2}{\Delta z} = 19.5 \text{ nH}, \qquad R = \varrho_{\text{Cu}}\frac{2\pi r_0}{\Delta z\,\delta} = 16.6\ \mu\Omega,$$

dove nel calcolo dell'induttanza si è trascurato lo spessore della parete del tubo, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m e $\varrho_{\text{Cu}} \approx 1.7 \times 10^{-8}$ Ω·m;

b)

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi') = I_0 \cos(\omega t + \phi), \qquad \text{dove} \qquad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = 1.93 \text{ kA},$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \phi' = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega L}{R} = 1.22 \text{ rad} = 69.7°;$$

c)

$$P_{\text{eff}} = \frac{1}{2} I_0^2 R = 30.7 \text{ W}.$$