Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 21/02/2022

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Due condensatori identici di capacità $C_1 = C_2 = 3.7$ pF e collegati in parallelo hanno facce piane e parallele in vuoto distanti tra loro $d = 1.1$ mm. Il sistema è caricato alla tensione $\Delta V_0 = 12$ V e quindi scollegato dal generatore. Successivamente lo spazio interno del primo condensatore è riempito con un dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 5.3$. Si calcolino:

a) le capacità iniziale C_0 e finale C' del sistema;

b) i campi elettrici iniziali E_1 e E_2 e finali E'_1 e E'_2 nei due condensatori;

c) le energie elettrostatiche iniziali U_0 e finale U' del sistema, il lavoro meccanico $\mathcal{L}$ svolto dal sistema nell'introduzione del dielettrico e l'energia U_J dissipata nell'operazione.

Svolgimento:

a)
$$C_0 = 2C_1 = 7.40 \text{ pF}, \qquad C' = (\epsilon_r + 1)C_1 = 23.3 \text{ pF};$$

b)
$$E_1 = E_2 = \frac{\Delta V_0}{d} = 10.9 \text{ kV/m}, \qquad E'_1 = E'_2 = \frac{\Delta V'}{d} = \frac{C_0 \Delta V_0}{C' d} = \frac{2\Delta V_0}{(\epsilon_r + 1)d} = 3.46 \text{ kV/m};$$

c)
$$U_0 = \tfrac{1}{2} C_0 \Delta V_0^2 = C_1 \Delta V_0^2 = 533 \text{ pJ}, \qquad U' = \frac{(C_0 \Delta V_0)^2}{2C'} = \frac{2C_1 \Delta V_0^2}{\epsilon_r + 1} = 169 \text{ pJ},$$
$$\mathcal{L} = U_0 - U' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} C_1 \Delta V_0^2 = 364 \text{ pJ}, \qquad U_J = 0.$$

Esercizio 2

Una spira circolare di raggio $R = 13$ cm percorsa da una corrente $I = 1.7$ A giace nel piano $z = 0$ con centro nell'origine. Il verso della corrente è legato al verso positivo dell'asse z dalla regola della mano destra. Si calcoli:

a) l'espressione del campo magnetico $\mathbf{B}(0,0,z)$ sull'asse della spira;

b) l'energia magnetica U_m di un dipolo magnetico $\mathbf{m}_B = (0,0,11)$ μA m^2 posto sull'asse della spira alla posizione $\mathbf{r}_0 = (0,0,3R/2)$;

c) la forza $\mathbf{F}_B$ e il momento della forza $\mathbf{M}_B$ agenti sul dipolo.

Svolgimento:

a)
$$\mathbf{B}(0,0,z) = B_z(z)\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi R\sqrt{R^2+z^2}}{(R^2+z^2)^{3/2}} \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\,\hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{z}};$$

b)
$$U_m = -\mathbf{m}_B \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = -\frac{4\mu_0 I\, m_B}{13\sqrt{13}R} = -15.4 \text{ pJ};$$

c)
$$\mathbf{F}_B = -\boldsymbol{\nabla} U_m\,|_{\mathbf{r}_0} = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 I m_B R^2 z}{(R^2+z^2)^{5/2}}\bigg|_{\mathbf{r}_0} \hat{\mathbf{z}} = -164\,\hat{\mathbf{z}} \text{ pN}, \qquad \mathbf{M}_B = \mathbf{m}_B \times \mathbf{B} = 0.$$

Esercizio 3

Una sbarra di materiale conduttore di resisitività $\rho = 1.9\ \mu\Omega\,\mathrm{m}$ ha lunghezza $L = 53$ cm, sezione $\Sigma = 3.1\ \mathrm{cm}^2$ e massa $m = 390$ g. Partendo da ferma, e rimanendo orizzontale, la sbarra cade scivolando senza attrito lungo due guide parallele distanti L inclinate di un angolo $\theta = 30°$ sull'orizzontale. Le guide sono perfettamente conduttrici e cortocircuitate nel punto più alto. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $\mathbf{B} = 0.43\,\hat{\mathbf{z}}$ T. Trascurando l'autoinduzione si determini:

a) l'espressione della forza elettromotrice $\mathcal{E}(v)$ indotta nella sbarra in funzione della velocità v della stessa lungo le guide;

b) l'espressione della forza magnetica $\mathbf{F}(v)$ che agisce sulla sbarra in funzione della velocità v della stessa lungo le guide e la sua componente F_s nella direzione delle guide;

c) l'andamento in funzione del tempo $v(t)$ della velocità con cui la sbarra scivola lungo le guide.

Svolgimento:

a)

$$\mathcal{E}(v) = LvB\cos\theta;$$

b)

$$\mathbf{F}(v) = \frac{\mathcal{E}(v)}{R}\,\mathbf{L}\times\mathbf{B} \qquad \text{e} \qquad F_s = -\frac{vL^2B^2\cos^2\theta}{R}$$

dove $R = \rho L/\Sigma = 3.25\ \mathrm{m}\Omega$ e $\mathbf{L}$ punta nella direzione della corrente nella sbarra (che circola in verso orario nel circuito visto dall'alto);

c) l'equazione del moto si scrive

$$mg\sin\theta + F_s = m\frac{dv}{dt} \qquad \longrightarrow \qquad \int_0^v \frac{dv}{v - v_\infty} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t dt$$

dove

$$\tau = \frac{mR}{L^2B^2\cos^2\theta} = 3.25\ \mathrm{ms} \qquad \text{e} \qquad v_\infty = g\sin\theta\,\tau = 16.0\ \mathrm{cm/s}.$$

Si ha quindi

$$v(t) = v_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$