**Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica**
**Prova d'esame di Fisica 2 – 24/02/2020**

*Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)*

## Esercizio 1

Una sfera di raggio $R_1 = 10$ cm ha una carica di volume uniforme $\rho$ ed è circondata da un guscio dielettrico di spessore $R_2 - R_1 = 10$ cm. Sapendo che il potenziale elettrico sulla superficie esterna del dielettrico è $V_2 = 50$ V e che quello al centro della sfera è $V_0 = 125$ V, si calcoli: :

a) la densità volumetrica di carica $\rho$;

b) la costante dielettrica relativa $\epsilon_r$ del materiale dielettrico;

c) il vettore densità di polarizzazione $\mathbf{P}$ in un punto al centro dello strato di dielettrico.

Svolgimento:

a)

$$V_2 = \int_{R_2}^{\infty} E(r)\,dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{R_2}^{\infty} \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R_1^3}{r^2}\,dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{R_1^3}{R_2} \qquad \longrightarrow \qquad \rho = \frac{3\epsilon_0 R_2 V_2}{R_1^3} = 2.66\times 10^{-7}\ \mathrm{C/m^3};$$

b)

$$V_2 - V_0 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{R_1}\frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{r^2}\,dr - \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho\frac{4}{3}\pi R_1^3}{r^2}\,dr = -\frac{\rho R_1^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

da cui

$$\epsilon_r = \frac{1 - \frac{R_1}{R_2}}{\frac{R_1}{R_2}\left(\frac{V_0}{V_2} - 1\right) - \frac{1}{2}} = 2;$$

c)

$$P_r(r) = D_r(r) - \epsilon_0 E_r(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{\rho\frac{4}{3}\pi R_1^3}{r^2}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) = \frac{\rho R_1^3}{6r^2} = \frac{\epsilon_0 R_2 V_2}{2r^2}$$

da cui

$$P_r\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right) = \frac{2\epsilon_0 R_2 V_2}{(R_1 + R_2)^2} = 1.97\ \mathrm{nC/m^2}.$$

## Esercizio 2

Un cilindro di ferro di lunghezza $L = 10$ cm e raggio $R = 2.5$ cm è uniformemente magnetizzato nella direzione parallela al suo asse. Sapendo che il momento di dipolo magnetico del cilindro è $m_z = 75\ \mathrm{Am^2}$ si calcoli:

a) il vettore densità di magnetizzazione $\mathbf{M}$ nel cilindro;

b) il valore del campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ al centro della faccia superiore del cilindro;

c) il valore massimo $|H_{\max}|$ del campo magnetico $\mathbf{H}$.

Svolgimento:

a)

$$M_z = \frac{m_z}{\pi R^2 L} = 382\ \mathrm{kA/m};$$

b) il campo $B$ all'interno del cilindro magnetizzato è lo stesso di quello di un solenoide di dimensioni finite con densità lineare di corrente pari a $M_z$. In un punto dell'asse del cilindro il campo $B$ si calcola applicando la legge di Biot e Savart:

$$B_z(z_0) = \frac{\mu_0}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{R^2 M_z}{\left[R^2 + (z-z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,dz = -\frac{\mu_0 M_z}{2}\int_{\theta_{\max}}^{\theta_{\min}} \sin\theta\,d\theta = \frac{\mu_0 M_z}{2}(\cos\theta_{\min} - \cos\theta_{\max})$$

dove

$$\cos\theta_{\min} = \frac{\frac{L}{2} - z_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} - z_0\right)^2}} \qquad\qquad \cos\theta_{\max} = -\frac{\frac{L}{2} + z_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{2} + z_0\right)^2}}.$$

Nel punto $z_0 = \frac{L}{2}$

$$B_z\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\mu_0 M_z L}{2\sqrt{R^2 + L^2}} = 233 \text{ mT};$$

c)

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}.$$

Il campo di induzione magnetica $B$ ha sull'asse un massimo al centro del cilindro, che arriva al valore $\mu_0 M_z$ solo in un cilindro con $\frac{R}{L} \approx 0$. Il valore di $B$ trovato sopra può essere scritto come

$$\frac{\mu_0 M_z}{2}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}}} < \frac{\mu_0 M_z}{2}.$$

Il campo $H$ ha quindi la sua massima intensità proprio in quel punto, all'interno del materiale magnetico:

$$|H_{\max}| = \left|\frac{B_z\left(\frac{L}{2}\right)}{\mu_0} - M_z\right| = 197 \text{ A/m}.$$

## Esercizio 3

Una spira rettangolare piana di resistenza complessiva $R = 3.0\ \Omega$ ha un lato mobile di lunghezza $L = 13$ cm. La spira è attraversata in direzione normale da un campo di induzione magnetica di intensità $B = 1.0$ T. Al lato mobile è appeso un grave di massa $m = 11$ g. Trascurando gli attriti meccanici e l'autoinduzione, si calcoli:

a) la forza elettromotrice $V$ che deve essere inserita nella spira affinché il corpo non cada;

b) la forza elettromotrice $V'$ che deve essere inserita nella spira affinché il corpo si muova verso l'alto con velocità costante $v = 0.9$ m/s;

c) la potenza $P$ dissipata dal generatore in quest'ultimo caso.

Svolgimento:

a) Utilizzando la seconda legge di Laplace

$$\frac{V}{R}LB = mg \qquad \longrightarrow \qquad V = \frac{Rmg}{LB} = 2.49 \text{ V}$$

dove $g = 9.81$ m/s$^2$;

b) essendo nulla l'accelerazione del corpo, l'equilibrio delle forze del punto precedente vale ancora. A causa del moto del corpo, però, nel segmento mobile della spira si genera una forza elettromotrice $\Delta V$ opposta a $V$:

$$\Delta V = vBL \qquad\qquad \longrightarrow \qquad\qquad V' = V + \Delta V = 2.61 \text{ V};$$

c)

$$P = V'I = VI + mgv = 2.16 \text{ W}.$$