Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 22/02/2021

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Una sfera di raggio $R_0 = 3.7$ mm ha una carica di superficie $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$, dove $\sigma_0 = -53$ nC/m^2 e θ è l'angolo polare. Si calcoli:

a) il momento di dipolo $\mathbf{p}$ della sfera;

b) il potenziale $\varphi(\mathbf{r}_1)$ nel punto $\mathbf{r}_1 = (19, -31, 53)$ cm;

c) il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1)$ nello stesso punto.

Svolgimento:

a) La carica negativa q_- del sistema è distribuita tra $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$:

$$q_- = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_0 \cos\theta \, 2\pi R_0 \sin\theta \, R_0 \, d\theta = \sigma_0 \, 2\pi R_0^2 \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sigma_0 \, \pi R_0^2 = -q_+.$$

Il baricentro di q_- è

$$z_- = \frac{1}{q_-}\int z \, dq_- = \frac{1}{q_-}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R_0 \cos\theta \, \sigma_0 \cos\theta \, 2\pi R_0 \sin\theta \, R_0 \, d\theta = 2R_0 \left[\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}R_0 = -z_+.$$

Si ha quindi

$$p_z = q_+ \, [z_+ - z_-] = \sigma_0 \, \frac{4}{3}\pi R_0^3 = -11.2 \text{ fC} \cdot \text{m};$$

b)

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} = -202 \ \mu\text{V}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

c)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_1)\,\mathbf{r}_1 - \mathbf{p}\, r_1^2}{r_1^5} = (-279, 454, -396) \ \mu\text{V/m}, \qquad E(\mathbf{r}_1) = 664 \ \mu\text{V/m}.$$

Esercizio 2

Un disco di raggio $R_1 = 3.7$ cm, carico uniformemente con una densità di carica di superficie $\sigma_0 = -53$ nC/m^2 ruota attorno al suo asse con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = 0.11 \ \hat{\mathbf{z}}$ krad/s. Si calcoli:

a) il campo magnetico $\mathbf{B}(0)$ nel centro del disco;

b) il momento di dipolo magnetico $\mathbf{m}$ del disco;

c) il potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)$ nel punto $\mathbf{r}_1 = (19, -31, 53)$ cm;

Svolgimento:

a)

$$B_z(0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{R_1} \frac{\omega_z}{2\pi} \frac{\sigma_0 \, (2\pi\rho)^2 \, d\rho}{\rho^2} = \frac{\mu_0 \omega_z \sigma_0}{2} R_1 = -136 \text{ fT}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

b)

$$m_z = \frac{\omega_z}{2\pi}\int_0^{R_1} \pi\rho^2 \, \sigma_0 \, 2\pi\rho \, d\rho = \frac{\pi \omega_z \sigma_0 R_1^4}{4} = -8.58 \text{ pA} \cdot \text{m}^2;$$

c)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} = (-1.00, -0.614, 0.00) \times 10^{-18} \text{ T} \cdot \text{m}, \qquad A(\mathbf{r}_1) = 1.18 \times 10^{-18} \text{ T} \cdot \text{m}.$$

Esercizio 3

Un cilindro di diametro $D = 9.1$ mm e lunghezza h magnetizzato permanentemente nella direzione dell'asse con $M_z = +0.53$ MA/m è inserito a velocità costante $v_z = +3.7$ m/s in un solenoide retto molto lungo con $n = 11$ spire/cm e resistenza complessiva $R = 6.1\ \Omega$. Si calcoli:

a) la corrente $I(t)$ indotta nel solenoide;

b) la forza magnetica $\mathbf{F}(t)$ esercitata sul cilindro;

c) si ripetano i due punti precedenti per il caso in cui il cilindro sia estratto dal solenoide con velocità $-v_z$.

Svolgimento:

a)

$$I(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{R}\dfrac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\dfrac{\mu_0 M_z \pi D^2\, n v_z}{4R} = -28.9 \text{ mA} & \left(0 \le t \le \dfrac{h}{v_z}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{h}{v_z} \le t\right) \end{cases}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m e il segno meno indica che la corrente percorre gli avvolgimenti del solenoide in verso opposto rispetto alla direzione della magnetizzazione;

b) indicando con U l'energia magnetica

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\, dV, \qquad \mathbf{F} = +\boldsymbol{\nabla} U.$$

Il campo magnetico $\mathbf{B}$ è la sovrapposizione di due campi entrambi orientati lungo l'asse z. Il primo è quello del cilindro $B_1 = \mu_0 M_z$, mentre il secondo, $B_2 = -\mu_0 n I$, è dovuto alla corrente indotta:

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\int B_1^2\, dV + \frac{1}{2\mu_0}\int B_2^2\, dV + \frac{1}{\mu_0}\int B_1 B_2\, dV$$

I primi due integrali non dipendono dalle coordinate spaziali. Il terzo, che è diverso da zero solo nel volume del cilindro interno al solenoide, vale

$$\frac{1}{\mu_0}\int B_1 B_2\, dV = -\frac{\mu_0^2 M_z^2 n^2 \pi D^2 v_z}{4R}\,\frac{\pi D^2}{4} z$$

dove $z = v_z t$. Si ha quindi

$$F_z(t) = +\frac{\partial U}{\partial z} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0^2 M_z^2 n^2 \pi^2 D^4 v_z}{16R} = -1.38 \text{ mN} & \left(0 \le t \le \dfrac{h}{v}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{h}{v} \le t\right) \end{cases}$$

e la forza magnetica è diretta lungo l'asse del solenoide verso l'esterno; la potenza $F_z v_z$ spesa dalla forza corrisponde alla potenza Joule $I^2 R$ dissipata negli avvolgimenti del solenoide;

c) nell'estrazione corrente e forza cambiano verso: la corrente è ora concorde con la magnetizzazione e la forza è verso l'interno del solenoide.