Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 09/12/2020

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Un condensatore piano con dielettrico di capacità $C = 54$ pF è costituito da due armature circolari di raggio $\rho_0 = 1.2$ cm separate da una distanza $\Delta z_0 = \rho_0/2$. Tra le armature c'è una differenza di potenziale $\Delta\varphi = 1.5$ V. Supponendo che il dielettrico sia polarizzato uniformemente, e assumendo che l'asse z abbia origine nel centro del cilindretto si calcoli:

a) la suscettività χ del dielettrico;

b) il campo elettrico $\mathbf{E}$ nel punto $\mathbf{r}_0 = (0, 5\rho_0, 0)$;

c) il potenziale φ nel punto $\mathbf{r}_1 = (0, 0, 10\Delta z_0)$.

Svolgimento:

a)

$$\chi = \frac{C\Delta z_0}{\epsilon_0 \pi \rho_0^2} - 1 = 79.9$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

b) il momento di dipolo del condensatore è

$$p_z = \epsilon_0 E\, \pi\rho_0^2\, \Delta z_0 = \pi\rho_0^2\, \epsilon_0 \Delta\phi$$

e quindi

$$E_z(\mathbf{r}_0) \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_z}{r_0^3} = -\frac{\Delta\varphi}{4\cdot 5^3\rho_0} = -250 \text{ mV/m};$$

c)

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_z}{r_1^2} = \frac{\Delta\varphi}{100} = 15 \text{ mV}.$$

Esercizio 2

Si consideri un cilindretto magnetizzato uniformemente secondo il suo asse, di raggio $\rho_0 = 1.2$ cm e altezza $\Delta z_0 = \rho_0/2$. Assumendo l'origine dell'asse z nel centro del cilindretto, se il campo magnetico al centro della faccia superiore del cilindretto vale $B_{z0} = B_z(0, 0, \Delta z_0/2) = 350$ μT, si calcoli:

a) la magnetizzazione M_z del cilindretto;

b) il campo magnetico $\mathbf{B}$ nel punto $\mathbf{r}_1 = (0, 4\rho_0, 8\Delta z_0)$;

c) il potenziale vettore $\mathbf{A}$ nello stesso punto.

Svolgimento:

a) il campo magnetico al centro della faccia superiore del cilindretto è lo stesso di quello generato da un solenoide di identica geometria con corrente di superficie pari alla densità di magnetizzazione:

$$B_{z0} = \mu_0 M_z \frac{\Delta z_0}{\sqrt{\rho_0^2 + (\Delta z_0)^2}}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m. Si ha quindi

$$M_z = \sqrt{5}\,\frac{B_{z0}}{\mu_0} = 623 \text{ A/m};$$

b) il momento di dipolo del cilindretto vale

$$m_z = M_z \pi \rho_0^2 \Delta z_0$$

e quindi

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_1) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1 - r_1^2 \mathbf{m}}{\mathbf{r}_1^5} = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi} \frac{(0, 3y_1 z_1, 2z_1^2 - y_1^2)}{(y_1^2 + z_1^2)^{5/2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{B_{z0}}{2048}(0,3,1) = (0, 811, 270)\ \mathrm{nT};$$

c)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}_1}{r_1^3} = -\frac{\mu_0 m_z}{4\pi} \frac{y_1}{(y_1^2 + z_1^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{x}} = -\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{B_{0z}\rho_0}{256}\,\hat{\mathbf{x}} = -25.9\,\hat{\mathbf{x}}\ \mathrm{nT}\cdot\mathrm{m}.$$

Esercizio 3

Un circuito piano composto da $N_1 = 31$ spire circolari di raggio $R_1 = 23$ cm è coassiale con un secondo circuito piano composto da $N_2 = 37$ spire circolari di raggio $R_2 = 1.1$ cm e percorso da una corrente $I_2 = 13$ A che si muove con velocità $v_z = 1.7$ m/s lungo l'asse del sistema. Si calcoli:

a) il momento magnetico $\mathbf{m}_2$ del secondo circuito;

b) il coefficiente di mutua induzione $M(z)$ dei due circuiti in funzione della posizione relativa z del secondo; si determini il massimo valore $M_{\max}$ del coefficiente;

c) la forza elettromotrice $\mathcal{E}(z)$ generata nel primo circuito in funzione della posizione relativa z del secondo; si determini il massimo valore $\mathcal{E}_{\max}$ della forza elettromotrice.

Svolgimento:

a)

$$m_{2z} = \pm N_2 I_2\, \pi R_2^2 = \pm 183\ \mathrm{mA}\cdot\mathrm{m}^2$$

dove vale il segno $+$ o il segno $-$ a seconda che la corrente nel secondo circuito circoli nel verso positivo o negativo rispetto all'asse z;

b)

$$M = \frac{\Phi_1(\mathbf{B}_2)}{I_2} = \frac{\Phi_2(\mathbf{B}_1)}{I_1} \approx \pm\frac{\mu_0}{2} \frac{N_1 R_1^2}{(R_1^2 + z^2)^{3/2}} N_2 \pi R_2^2$$

dove vale il segno $+$ o il segno $-$ a seconda che i versi dei due circuiti siano concordi o discordi. Si ha il massimo valore assoluto del coefficiente per $z = 0$:

$$M_{\max} = \frac{\pi\mu_0}{2} \frac{N_1 N_2 R_2^2}{R_1} = 1.19\ \mu\mathrm{H};$$

c)

$$\mathcal{E}(z) = -\frac{d\Phi_1(\mathbf{B}_2)}{dt} = -I_2 \frac{dM}{dt} = \frac{3\pi\mu_0}{2} \frac{I_2 N_1 N_2 R_1^2 R_2^2 v z}{(R_1^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Si ha la massima forza elettromotrice nella posizione in cui si azzera la derivata:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad z = \pm\frac{R_1}{2}$$

e quindi

$$\mathcal{E}_{\max} = \frac{24\pi\mu_0 I_2 N_1 N_2 R_2^2 v}{\sqrt{5}\cdot 25 R_1^2} = 98.3\ \mu\mathrm{V}.$$