Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 28/09/2020

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Un condensatore a facce piane e parallele di forma quadrata di lato $d = 9.0$ cm e distanti tra loro $h = 1.0$ cm è caricato alla tensione $V_0 = 120$ V e poi staccato dal generatore. Tra le facce si inserisce, per una profondità $x = 3.0$ cm, una lastra neutra di dielettrico con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4.8$ e spessore $b = 0.80$ cm. Si calcoli:

a) le capacità C_0 e C_x del dispositivo prima e dopo l'inserimento della lastra;

b) la differenza di potenziale V_x tra le armature;

c) la forza F che agisce sulla lastra di dielettrico.

Svolgimento:

a)

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 d^2}{h} = 7.17 \text{ pF},$$
$$C_x = \left[\frac{b}{\epsilon_0 \epsilon_r x d} + \frac{h-b}{\epsilon_0 x d}\right]^{-1} + \frac{\epsilon_0 (d-x) d}{h} = \frac{\epsilon_0 d}{h}\,\frac{\epsilon_r h d - \chi b (d-x)}{b + \epsilon_r (h-b)} = 11.3 \text{ pF}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m e $\chi = \epsilon_r - 1$;

b)

$$V_x = C_0 V_0 / C_x = 76.2 \text{ V};$$

c)

$$F = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{q=\text{cost}} = -\frac{C_0^2 V_0^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C_x}\right) = \frac{C_0^2 V_0^2}{2}\,\frac{h}{\epsilon_0 d}\,\frac{\chi b [b + \epsilon_r (h-b)]}{[\epsilon_r h d - \chi b (d-x)]^2} = 1.99 \times 10^{-7} \text{ N}.$$

Esercizio 2

Un componente elettrico a due terminali collegato ad un generatore di forza elettromotrice continua $V_0 = 12$ V è attraversato da una corrente continua $I_0 = 2.1$ A. Collegato ad un generatore di forza elettromotrice alternata $\hat{V} = V_0 \cos 2\pi\nu t$ a $\nu = 50$ Hz esso è percorso da una corrente efficace $I_{\text{eff}} = 0.75$ A.

a) Si disegni il più semplice schema circuitale del componente;

b) si calcolino i valori degli elementi circuitali che compaiono nello schema;

c) si determini la fase ϕ_I della corrente alternata rispetto alla tensione.

Svolgimento:

a) il componente è la serie di una resistenza R e di un'induttanza L;

b) dalla misura in continua:

$$R = \frac{V_0}{I_0} = 5.71\ \Omega;$$

dalla misura in alternata:

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu^2 L^2}} \qquad \longrightarrow \qquad L = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{V_0^2}{2I_{\text{eff}}^2} - R^2} = \frac{V_0}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{1}{2I_{\text{eff}}^2} - \frac{1}{I_0^2}} = 31.1 \text{ mH};$$

c)

$$\phi_I = -\arctan\frac{2\pi\nu L}{R} = -\arctan\sqrt{\frac{I_0^2}{2I_{\text{eff}}^2} - 1} = -59.7^\circ = -1.04 \text{ rad}.$$

Esercizio 3

a) Si calcoli il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ all'interno di una bobina toroidale a sezione quadrata con $N = 170$ spire e raggi interno ed esterno $a = 5.0$ cm e $b = 6.0$ cm percorsa dalla corrente I;

b) una seconda bobina con $N' = 100$ avvolgimenti è avvolta attorno al toroide nello stesso verso e può essere collegata in serie alla prima con uno dei suoi due capi a scelta. Si calcoli il coefficiente di autoinduzione L_{tot} del sistema in tutti e due i casi;

c) se le due bobine sono scollegate, si determini la tensione $V(t)$ ai capi della seconda quando nella prima scorre una corrente $I(t) = I_0 \cos\omega t$

Svolgimento:

a) in coordinate cilindriche, con il verso di $\hat{\phi}$ determinato dal verso positivo della corrente,

$$B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi\rho} \qquad\qquad a \le \rho \le b$$

dove $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ H/m;

b) per una bobina toroidale

$$L \equiv \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{N}{I}\int_S B_\phi(\rho)\, dS = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 (b-a) \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 (b-a) \ln\frac{b}{a};$$

nei due casi, quindi

$$L_{\text{tot}} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0}{2\pi}(N+N')^2\,(b-a)\,\ln\dfrac{b}{a} = 26.6\ \mu\text{H} & \text{concordi} \\[2ex] \dfrac{\mu_0}{2\pi}(N-N')^2\,(b-a)\,\ln\dfrac{b}{a} = 1.79\ \mu\text{H} & \text{discordi;} \end{cases}$$

c)

$$V(t) = -N'\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega\,\frac{\mu_0}{2\pi} N N' I_0\,(b-a)\,\ln\frac{b}{a}\,\sin\omega t.$$