Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova telematica d'esame di Fisica 2 – 20/07/2020

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Un condensatore sferico di raggi $a = 6.7$ cm e $b = 7.6$ cm è completamente riempito da due calotte semisferiche di due diversi dielettrici lineari, omogenei e isotropi con costanti dielettriche relative $\epsilon_{r1} = 2.4$ e $\epsilon_{r2} = 4.2$ ed è carico con una carica totale $Q = 0.13$ μC. Si calcoli:

a) il campo elettrico $\mathbf{E}$ nello spazio interno al condensatore;

b) il valore C della sua capacità;

c) l'energia totale U_e.

Svolgimento:

a) Il campo elettrico è radiale e per la sua continuità sulla superficie di separazione dei due dielettrici deve valere, in termini dello spostamento elettrico $\mathbf{D}$ nei due emisferi,

$$E(r) = \frac{D_1(r)}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{D_2(r)}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}.$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m. In termini delle densità di carica libera sull'elettrodo interno questa relazione si scrive come

$$\frac{\sigma_1}{\epsilon_{r1}} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_{r2}},$$

e usando la regola di somma

$$Q_1 + Q_2 = 2\pi a^2 (\sigma_1 + \sigma_2) = Q$$

si ottiene

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \frac{Q}{r^2};$$

b)

$$C = C_1 + C_2 = 2\pi\epsilon_0(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) \frac{ab}{b-a} = 208 \text{ pF};$$

c)

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2(b-a)}{4\pi\epsilon_0(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})ab} = 40.6\ \mu\text{J}.$$

Esercizio 2

Un solenoide toroidale è costituito di $N = 170$ spire percorse da una corrente $I = 7.3$ A avvolte su un anello di ferro dolce a sezione circolare. L'anello ha lunghezza media $L = 37$ cm, sezione $S = 1.3$ cm^2 e un traferro di spessore $h = 2.3$ mm. Assumendo che il materiale risponda linearmente con una permeabilità magnetica relativa $\mu_r = 1100$ si calcoli:

a) la forza magnetomotrice $\mathcal{E}_{\text{mm}}$ applicata al circuito;

b) il campo di induzione magnetica B nel traferro;

c) la forza F tra le due facce del traferro.

Svolgimento:

a)

$$\mathcal{E}_{\text{mm}} = NI = 1.24 \text{ kA} \cdot \text{spira};$$

b) per la continuità della sua componente normale, il campo B ha lo stesso valore nel ferro e nel traferro. Di conseguenza, dalla circuitazione del campo magnetico H nell'anello si ha

$$\oint H\,dL = NI \approx H_{\mathrm{Fe}}L + H_{\mathrm{aria}}h = \frac{B}{\mu_0}\left(\frac{L}{\mu_r} + h\right) \qquad \longrightarrow \qquad B = \frac{\mu_0\mu_r NI}{L+\mu_r h} = 592 \text{ mT}$$

dove $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m;

c) per calcolare la forza si parte dall'energia magnetica

$$U_m = \frac{1}{2}\int \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,dV = \frac{S}{2}\left(H_{\mathrm{Fe}}L + H_{\mathrm{aria}}h\right)B = \frac{(SB)^2}{2\mu_0\mu_r S}\left(L+\mu_r h\right)$$

e si ottiene la forza come

$$F = -\frac{dU_m}{dh} = -\frac{SB^2}{2\mu_0} = -18.1 \text{ N}$$

dove il segno negativo indica forza attrattiva. Lo stesso risultato si ottiene scrivendo l'energia magnetica come

$$U_m = \frac{\mu_o\mu_r S\mathcal{E}_{\mathrm{mm}}^2}{2(L+\mu_r h)}$$

e derivando rispetto ad h stavolta con segno positivo.

Esercizio 3

Un trasformatore ha un avvolgimento primario di $N_1 = 275$ spire e uno secondario con $N_2 = 15$ spire, avvolti entrambi nello stesso verso attorno ad un toro a sezione quadrata di materiale ferromagnetico. Il primario è alimentato da un generatore ideale di forza elettromotrice $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0\cos\omega t$, con $\mathcal{E}_0 = 220$ V e $\omega = 314$ rad/s. Sapendo che l'induttanza del primario è $L_1 = 0.122$ H, e trascurando la dissipazione negli avvolgimenti e nel ferro si determini:

a) l'induttanza L_2 del secondario e la mutua induttanza M dei due circuiti;

b) con il secondario aperto, la corrente $I_1'(t)$ nel primario e la tensione $V_2'(t)$ ai capi del secondario, giustificando i segni;

c) con il secondario chiuso su una resistenza $R = 3.3\ \Omega$, le correnti $I_1(t)$ e $I_2(t)$ nei due circuiti e la potenza P spesa dal generatore.

Svolgimento:

a)

$$L_2 = L_1\frac{N_2^2}{N_1^2} = 363\ \mu\text{H} \qquad\qquad M = \sqrt{L_1L_2} = L_1\frac{N_2}{N_1} = 6.65 \text{ mH};$$

b)

$$\mathcal{E}(t) - L_1\frac{dI_1'}{dt} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad I_1'(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L_1}\sin\omega t \qquad \text{dove} \qquad \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L_1} = 5.74 \text{ A},$$

$$V_2'(t) = -M\frac{dI_1'}{dt} = -\mathcal{E}(t)\frac{N_2}{N_1} = -\mathcal{E}_0\frac{N_2}{N_1}\cos\omega t \qquad \text{dove} \qquad \mathcal{E}_0\frac{N_2}{N_1} = 12.0 \text{ V};$$

c) le equazioni dei due circuiti sono:

$$\mathcal{E}(t) - L_1\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt} = 0 \qquad \text{e} \qquad -L_2\frac{dI_2}{dt} - M\frac{dI_1}{dt} = RI_2$$

e passando alla notazione simbolica vettoriale complessa

$$\vec{\mathcal{E}} - i\omega L_1\vec{I}_1 - i\omega M\vec{I}_2 = 0 \qquad \text{e} \qquad -i\omega L_2\vec{I}_2 - i\omega M\vec{I}_1 = R\vec{I}_2.$$

Ricavando $\vec{I}_1$ da quest'ultima e sostituendo nella prima

$$\vec{I}_2 = -\frac{\mathcal{E}_0}{R}\frac{N_2}{N_1} = 3.64 \text{ A}, \qquad\qquad \vec{I}_1 = \mathcal{E}_0\left(\frac{1}{R}\frac{N_2^2}{N_1^2} + \frac{1}{i\omega L_1}\right) = (0.198 - i\,5.74) \text{ A},$$

$$P = \mathcal{E}_0|\vec{I}_1|\cos\widehat{\vec{\mathcal{E}}\vec{I}_1} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\frac{N_2^2}{N_1^2} = |\vec{I}_2|^2R = 43.6 \text{ W}.$$