Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova telematica d'esame di Fisica 2 – 15/06/2020

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Una carica $q = 1.1$ pC e un dipolo permanente $p = 1.3 \times 10^{-19}$ C·m, entrambi puntiformi, sono a distanza $z = 1.9$ cm. Il vettore $\mathbf{p}$ forma un angolo $\alpha = 45°$ con il vettore posizione $\mathbf{r}$ del dipolo rispetto alla carica. Si calcoli:

a) il momento della forza M che agisce su $\mathbf{p}$;

b) la forza $\mathbf{F}$ che agisce su $\mathbf{p}$;

c) il momento della forza M' e la forza $\mathbf{F}'$ nel caso in cui un dipolo della stessa intensità p, anziché essere permanente, sia invece generato dalla polarizzazione di un cilindretto neutro di volume $\tau = 0.71$ mm^3 di un materiale lineare omogeneo e isotropo posto alla stessa distanza z dalla stessa carica q con l'asse allineato al vettore posizione $\mathbf{r}$. Si calcoli anche la costante dielettrica relativa ϵ_r del materiale. Si trascurino le variazioni del campo elettrico all'interno del cilindretto.

Svolgimento:

a) Detto $\mathbf{E}_0$ il campo elettrico della carica puntiforme

$$M = |\mathbf{p} \times \mathbf{E}_0| = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0 z^2} \sin\alpha = 2.52 \times 10^{-18} \text{ N} \cdot \text{m}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

b) in un sistema di riferimento in cui $\mathbf{p} = (p_x, 0, p_z) = p\sqrt{2}\,(1, 0, 1)/2$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{E}_0 = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \mathbf{E}_0$$

Evidentemente $\partial \mathbf{E}_0/\partial z = -2\mathbf{E}_0/z$, mentre $\partial \mathbf{E}_0/\partial x = E_0\, d\theta/(z\, d\theta)\, \hat{\mathbf{x}}$. Si ha quindi

$$\mathbf{F} = \frac{\sqrt{2}\, pq}{8\pi\epsilon_0 z^3} (\hat{\mathbf{x}} - 2\,\hat{\mathbf{z}}) = (1.33\,\hat{\mathbf{x}} - 2.65\,\hat{\mathbf{z}}) \times 10^{-16} \text{ N} \qquad F = 2.96 \times 10^{-16}\,\text{N};$$

c)

$$\mathbf{M}' = 0;$$

Il valore di ϵ_r si ottiene da

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}\tau = \tau\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{E}_0 \qquad \longrightarrow \qquad \epsilon_r = \frac{1}{1 - \dfrac{p}{\tau\epsilon_0 E_0}} = 4.08;$$

$$\mathbf{F}' = -\frac{\tau}{2}\vec{\nabla}\left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \epsilon_0 E_0^2\right) = -\frac{\tau}{2}\epsilon_0 \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \vec{\nabla} E_0^2 = \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \frac{q^2\tau}{8\pi^2\epsilon_0 z^5}\,\hat{\mathbf{r}} = p\frac{\partial E_0}{\partial z}\,\hat{\mathbf{r}} = -3.75 \times 10^{-16}\,\hat{\mathbf{r}}\text{ N}.$$

Esercizio 2

Un capacitore a facce piane e parallele assimilabili a due piani infiniti è carico con densità di carica superficiale $\sigma = 5.3\ \mu$C/m^2. La piastra positiva è il piano $z = d/2$, quella negativa il piano $z = -d/2$. Le due piastre si muovono con una stessa velocità costante $\mathbf{v} = 37\,\hat{\mathbf{x}}$ m/s. Si calcoli:

a) il campo magnetico $\mathbf{B}_{12}$ nello spazio tra le due piastre, il campo magnetico $\mathbf{B}_1$ nel semispazio sopra la faccia positiva e il campo magnetico $\mathbf{B}_2$ nel semispazio sotto la faccia negativa;

b) la forza magnetica per unità d'area $\mathbf{f}_\mathrm{m}$ agente sulla piastra positiva;

c) il valore v_0 della velocità per la quale la forza complessiva su questa piastra è nulla.

Svolgimento:

a) il campo nei tre domini spaziali è la somma dei campi generati dai piani positivo e negativo: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_+ + \mathbf{B}_-$, e quindi

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = 0, \qquad \mathbf{B}_{12} = (0, \mu_0 \sigma v, 0) = 2.46 \times 10^{-10}\ \hat{\mathbf{y}}\ \mathrm{T}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

b) la forza magnetica per unità d'area sulla piastra positiva si calcola come

$$\mathbf{f}_\mathrm{m} = \sigma \mathbf{v} \times \mathbf{B}_- = \left(0, 0, \frac{\mu_0 \sigma^2 v^2}{2}\right) = 2.42 \times 10^{-14}\ \hat{\mathbf{z}}\ \mathrm{N/m^2};$$

c) la forza elettrica per unità d'area sulla piastra positiva è

$$\mathbf{f}_\mathrm{e} = \sigma \mathbf{E}_- = \left(0, 0, -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\right) = -14.0\ \hat{\mathbf{z}}\ \mathrm{N/m^2}.$$

Per avere $\mathbf{f}_\mathrm{m} + \mathbf{f}_\mathrm{e} = 0$ bisognerebbe dunque che fosse

$$\mu_0 v_0^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \qquad \longrightarrow \qquad v_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.0 \times 10^8\ \mathrm{m/s}.$$

Esercizio 3

Una spira rettangolare di lati $\Delta x = 15$ cm e $\Delta y = 20$ cm, resistenza $R = 25\ \Omega$ e massa $m = 4.0$ g scivola senza attrito sul piano xy. Al tempo $t = t_0 = 0$ la spira ha velocità $v_x(0) = v_0 = 4.0$ cm/s ed entra nel semipiano $x > 0$ dove è presente un campo magnetico uniforme e costante $B_z = 0.50$ T. Si determini:

a) la legge oraria della spira $x(t)$;

b) la carica totale q che la attraversa;

c) l'energia W complessivamente dissipata nella spira per effetto Joule.

Svolgimento:

a) la forza sulla spira è data dalla seconda legge di Laplace applicata al lato della spira che entra per primo nel campo magnetico:

$$F(t) = m\frac{dv_x(t)}{dt} = i(t)\Delta y B.$$

La corrente è dovuta al flusso tagliato secondo la legge dell'induzione di Faraday:

$$i(t) = \frac{\Delta y v_x(t) B}{R}.$$

Inserendo questa espressione nella precedente e tenendo conto del verso della corrente si ottiene

$$\frac{dv_x}{v_x(t)} = -\frac{(\Delta y)^2 B^2}{mR} dt \qquad \longrightarrow \qquad \ln\frac{v_x(t)}{v_0} = -\frac{(\Delta y)^2 B^2}{mR}\, t \qquad \longrightarrow \qquad v_x(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

dove

$$\tau = \frac{mR}{(\Delta y)^2 B^2} = 10.0\ \mathrm{s}.$$

Prima dell'istante t_1 in cui la spira entra tutta nel campo magnetico e la corrente indotta si annulla

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t)\, dt = v_0 \tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad (0 < t < t_1).$$

Il valore di t_1 è dato da

$$x(t_1) = \Delta x \qquad \longrightarrow \qquad t_1 = -\tau \ln\left[1 - \frac{\Delta x}{v_0 \tau}\right] = 4.70\ \mathrm{s}.$$

Dopo t_1 la spira continua a muoversi con velocità costante $v_1 = v_x(t_1) = v_0 e^{-t_1/\tau} = 2.50$ cm/s e

$$x(t) = \Delta x + v_1(t - t_1) \qquad (t > t_1);$$

b)

$$q(t) = \int_0^t i(t)\, dt = \frac{\Delta y B}{R} x(t) \qquad \longrightarrow \qquad q = q(t_1) = \frac{\Delta y \Delta x B}{R} = \frac{\Phi(B)}{R} = 0.60 \text{ mC};$$

c)

$$W = \int_0^{t_1} i^2(t) R\, dt = \frac{(\Delta y)^2 B^2}{R} \int_0^{t_1} v_x^2(t)\, dt = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 - v_1^2\right) = 1.95\ \mu\text{J}.$$