

Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
 Prova d'esame di Fisica 2 – 14/06/2021

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Una lastra di spessore $d = 13$ cm di un materiale dielettrico lineare, omogeneo e isotropo di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2.3$ è carica con densità di carica di volume uniforme $\rho_{\text{lib}} = 0.53 \mu\text{C}/\text{m}^3$. Si determini:

- il campo elettrico $\mathbf{E}(0, 0, z)$ lungo un asse z ortogonale alla lastra e avente origine nel centro della stessa; si specifichi in particolare il campo elettrico nelle vicinanze di $z = d/2$;
- il potenziale $\varphi(0, 0, z)$ lungo lo stesso asse; si specifichi in particolare il potenziale nelle vicinanze di $z = d/2$
- la densità di carica di polarizzazione $\rho_{\text{pol}}(0, 0, z)$ lungo lo stesso asse e le densità di carica di superficie σ_{pol} nel dielettrico.

Svolgimento:

- Nella geometria data, il campo elettrico ha la sola componente z che dipende solo da z . Applichiamo il teorema di Gauss allo spostamento elettrico \mathbf{D} per una superficie chiusa cilindrica Σ allineata con l'asse z e simmetrica rispetto al piano $z = 0$. Per la simmetria del problema $D_z(0, 0, -z) = -D_z(0, 0, z)$ e quindi

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{D}) = 2D_z(0, 0, z)A = \begin{cases} \rho_{\text{lib}} 2Az & (|z| \leq d/2) \\ \rho_{\text{lib}} 2Ad & (|z| \geq d/2). \end{cases}$$

dove A è l'area di base della superficie. Si ha

$$\begin{aligned} D_z(0, 0, z) &= \rho_{\text{lib}} z, & E_z(0, 0, z) &= \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} z, & (|z| < \frac{d}{2}) \\ D_z(0, 0, z) &= \text{sgn}(z) \rho_{\text{lib}} d, & E_z(0, 0, z) &= \text{sgn}(z) \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0} d, & (|z| > \frac{d}{2}) \end{aligned}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m e $\text{sgn}(z) = z/|z|$; in particolare allora

$$E_z \left(0, 0, \frac{d}{2} \Big|_{-} \right) = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{d}{2} = 1.69 \text{ kV/m}, \quad E_z \left(0, 0, \frac{d}{2} \Big|_{+} \right) = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0} \frac{d}{2} = 3.89 \text{ kV/m};$$

- prendendo come riferimento il punto $(0, 0, 0)$

$$\varphi(0, 0, z) = - \int_0^z E_z(0, 0, z) dz = \begin{cases} - \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{z^2}{2} & (|z| \leq \frac{d}{2}) \\ - \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{d^2}{8} - \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0} d \left[\text{sgn}(z) z - \frac{d}{2} \right] & (|z| \geq \frac{d}{2}). \end{cases}$$

In particolare allora

$$\varphi \left(0, 0, \frac{d}{2} \Big|_{-} \right) = \varphi \left(0, 0, \frac{d}{2} \Big|_{+} \right) = - \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{d^2}{8} = -55.0 \text{ V};$$

-

$$\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot (\mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\partial D_z}{\partial z} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_{\text{lib}} = -300 \text{ nC}/\text{m}^3,$$

$$\sigma_{\text{pol}} = \epsilon_0 \left[E_z \left(0, 0, \frac{d}{2} \Big|_{+} \right) - E_z \left(0, 0, \frac{d}{2} \Big|_{-} \right) \right] = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_{\text{lib}} \frac{d}{2} = -\rho_{\text{pol}} \frac{d}{2} = 19.5 \text{ nC}/\text{m}^2.$$

Esercizio 2

Si consideri un toro a sezione quadrata di materiale magnetico di raggi interno ed esterno $R_1 = 1.9$ cm e $R_2 = 2.3$ cm. La magnetizzazione nel materiale può essere considerata avere valore costante $M = 0.47$ MA/m e circolare all'interno del toro così da poter essere scritta come $\mathbf{M} = M \hat{\phi}$.

- Si calcoli il campo di induzione magnetica \mathbf{B} e il campo \mathbf{H} all'interno del materiale;
- nel caso in cui nel toro sia praticato un traferro di spessore $d = 3.1$ mm, si calcolino i due campi all'interno del materiale e nel traferro.

Svolgimento:

- La magnetizzazione costante è equivalente ad una corrente di superficie $\mathbf{K} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$ che scorre sulla superficie del toro, dove $\hat{\mathbf{n}}$ è la normale alla superficie del toro. Il teorema di Ampère per una circonferenza γ di raggio $R_1 \leq r \leq R_2$ si scrive allora come

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{B}) = 2\pi r B_\phi = 2\pi R_1 \mu_0 M \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M} \frac{R_1}{r} \approx \mu_0 \mathbf{M} = 591 \hat{\phi} \text{ mT}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m. Il campo \mathbf{H} è

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \left(\frac{R_1}{r} - 1 \right) \mathbf{M} \approx 0;$$

- in presenza del traferro, per la solenoidalità di \mathbf{B} , il teorema di Ampère si scrive

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{B}) = 2\pi r B_\phi = (2\pi R_1 - d) \mu_0 M \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B} \approx \mu_0 \mathbf{M} \left[1 - \frac{d}{\pi(R_1 + R_2)} \right] = 577 \hat{\phi} \text{ mT}.$$

Il campo \mathbf{H} nel materiale vale allora

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \approx -\mathbf{M} \frac{d}{\pi(R_1 + R_2)} = -11.0 \hat{\phi} \text{ kA/m},$$

mentre in aria

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \approx \mathbf{M} \left[1 - \frac{d}{\pi(R_1 + R_2)} \right] = 0.459 \hat{\phi} \text{ MA/m}.$$

Esercizio 3

Un condensatore cilindrico di raggi interno ed esterno $R_1 = 1.9$ cm e $R_2 = 2.3$ cm e lunghezza $L = 1$ m è riempito con un materiale di conduttività $\sigma = 2.0 \times 10^{-12} \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$. Il condensatore è caricato ad una tensione $V_0 = 0.22$ kV e disconnesso dal generatore al tempo $t = 0$. Si calcoli:

- la capacità C del condensatore;
- il campo elettrico $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ e la densità di corrente di conduzione $\mathbf{J}_c(t, \mathbf{r})$ all'interno del condensatore;
- la corrente di spostamento $\mathbf{J}_D(t, \mathbf{r})$ e il campo magnetico $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$.

Svolgimento:

- Le linee di forza dei campi sono radiali. Per il teorema di Gauss applicato ad una superficie cilindrica Σ di raggio r e altezza L coassiale e interna al condensatore

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = E_r 2\pi r L = \frac{Q}{\epsilon_0} &\quad \longrightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} \hat{\mathbf{r}} \quad \longrightarrow \\ \longrightarrow \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} = 291 \text{ pF}; \end{aligned}$$

b) il condensatore è allo stesso tempo una resistenza di valore

$$R = \frac{1}{\sigma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{2\pi r L} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\sigma L} = \frac{\epsilon_0}{\sigma C} = 15.2 \text{ G}\Omega.$$

Evidentemente i due elementi sono sottoposti alla stessa tensione:

$$RI(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad \text{dove} \quad I(t) = -\frac{dQ}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} = -\frac{dt}{\epsilon_0/\sigma}.$$

Si ha quindi $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$ dove $\tau = \epsilon_0/\sigma = 4.43 \text{ s}$. Anche per la tensione vale $V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ e quindi

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{CV(t)}{2\pi\epsilon_0 L r} \hat{\mathbf{r}} = \frac{V_0 e^{-t/\tau}}{r \ln(R_2/R_1)} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{J}_c(t, \mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma V_0 e^{-t/\tau}}{r \ln(R_2/R_1)} \hat{\mathbf{r}};$$

c) la corrente di spostamento è

$$\mathbf{J}_D(t, \mathbf{r}) = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\sigma V_0 e^{-t/\tau}}{r \ln(R_2/R_1)} \hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{J}_c(t, \mathbf{r}) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = 0.$$