Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 09/04/2021

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Una lastra di spessore $d = 13$ cm di un materiale dielettrico lineare, omogeneo e isotropo di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2.3$ è carica con densità di carica di volume uniforme $\varrho_{\rm lib} = 0.53\ \mu\text{C/m}^3$. Si determini:

a) il campo elettrico $\mathbf{E}(0,0,z)$ lungo un asse z ortogonale alla lastra e avente origine nel centro della stessa; si specifichi in particolare il campo elettrico nelle vicinanze di $z = d/2$;

b) il potenziale $\varphi(0,0,z)$ lungo lo stesso asse; si specifichi in particolare il potenziale nelle vicinanze di $z = d/2$

c) la densità di carica di polarizzazione $\varrho_{\rm pol}(0,0,z)$ lungo lo stesso asse e le densità di carica di superficie $\sigma_{\rm pol}$ nel dielettrico.

Svolgimento:

a) Nella geometria data, il campo elettrico ha la sola componente z che dipende solo da z. Applichiamo il teorema di Gauss allo spostamento elettrico $\mathbf{D}$ per una superficie chiusa cilindrica Σ allineata con l'asse z e simmetrica rispetto al piano $z = 0$. Per la simmetria del problema $D_z(0,0,-z) = -D_z(0,0,z)$ e quindi

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{D}) = 2D_z(0,0,z)A = \begin{cases} \varrho_{\rm lib}\, 2Az & (|z| \le d/2) \\ \varrho_{\rm lib}\, 2Ad & (|z| \ge d/2). \end{cases}$$

dove A è l'area di base della superficie. Si ha

$$D_z(0,0,z) = \varrho_{\rm lib} z, \qquad E_z(0,0,z) = \frac{\varrho_{\rm lib}}{\epsilon_0\epsilon_r} z, \qquad \left(|z| < \frac{d}{2}\right)$$

$$D_z(0,0,z) = \text{sgn}(z)\varrho_{\rm lib} d, \qquad E_z(0,0,z) = \text{sgn}(z)\frac{\varrho_{\rm lib}}{\epsilon_0} d, \qquad \left(|z| > \frac{d}{2}\right)$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m e $\text{sgn}(z) = z/|z|$; in particolare allora

$$E_z\left(0,0,\left.\frac{d}{2}\right|_-\right) = \frac{\varrho_{\rm lib}}{\epsilon_0\epsilon_r}\frac{d}{2} = 1.69\ \text{kV/m}, \qquad E_z\left(0,0,\left.\frac{d}{2}\right|_+\right) = \frac{\varrho_{\rm lib}}{\epsilon_0}\frac{d}{2} = 3.89\ \text{kV/m};$$

b) prendendo come riferimento il punto $(0,0,0)$

$$\varphi(0,0,z) = -\int_0^z E_z(0,0,z)\,dz = \begin{cases} -\dfrac{\varrho_{\rm lib}}{\epsilon_0\epsilon_r}\dfrac{z^2}{2} & \left(|z| \le \dfrac{d}{2}\right) \\ -\dfrac{\varrho_{\rm lib}}{\epsilon_0\epsilon_r}\dfrac{d^2}{8} - \dfrac{\varrho_{\rm lib}}{\epsilon_0} d\left[\text{sgn}(z)z - \dfrac{d}{2}\right] & \left(|z| \ge \dfrac{d}{2}\right). \end{cases}$$

In particolare allora

$$\varphi\left(0,0,\left.\frac{d}{2}\right|_-\right) = \varphi\left(0,0,\left.\frac{d}{2}\right|_+\right) = -\frac{\varrho_{\rm lib}}{\epsilon_0\epsilon_r}\frac{d^2}{8} = -55.0\ \text{V};$$

c)

$$\varrho_{\rm pol} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{D} - \epsilon_0\mathbf{E}) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{\partial D_z}{\partial z} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\varrho_{\rm lib} = -300\ \text{nC/m}^3,$$

$$\sigma_{\rm pol} = \epsilon_0\left[E_z\left(0,0,\left.\frac{d}{2}\right|_+\right) - E_z\left(0,0,\left.\frac{d}{2}\right|_-\right)\right] = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\varrho_{\rm lib}\frac{d}{2} = -\varrho_{\rm pol}\frac{d}{2} = 19.5\ \text{nC/m}^2.$$

Esercizio 2

Si consideri un toro a sezione quadrata di materiale magnetico di raggi interno ed esterno $R_1 = 1.9$ cm e $R_2 = 2.3$ cm. La magnetizzazione nel materiale può essere considerata avere valore costante $M = 0.47$ MA/m e circolare all'interno del toro così da poter essere scritta come $\mathbf{M} = M\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$.

a) Si calcoli il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ e il campo $\mathbf{H}$ all'interno del materiale;

b) nel caso in cui nel toro sia praticato un traferro di spessore $d = 3.1$ mm, si calcolino i due campi all'interno del materiale e nel traferro.

Svolgimento:

a) La magnetizzazione costante è equivalente ad una corrente di superficie $\mathbf{K} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$ che scorre sulla superficie del toro, dove $\hat{\mathbf{n}}$ è la normale alla superficie del toro. Il teorema di Ampère per una circonferenza γ di raggio $R_1 \le r \le R_2$ si scrive allora come

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{B}) = 2\pi r B_\phi = 2\pi R_1 \mu_0 M \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}\,\frac{R_1}{r} \approx \mu_0 \mathbf{M} = 591\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\ \text{mT}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m. Il campo $\mathbf{H}$ è

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \left(\frac{R_1}{r} - 1\right)\mathbf{M} \approx 0;$$

b) in presenza del traferro, per la solenoidalità di $\mathbf{B}$, il teorema di Ampère si scrive

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{B}) = 2\pi r B_\phi = (2\pi R_1 - d)\mu_0 M \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{B} \approx \mu_0 \mathbf{M}\left[1 - \frac{d}{\pi(R_1 + R_2)}\right] = 577\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\ \text{mT}.$$

Il campo $\mathbf{H}$ nel materiale vale allora

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \approx -\mathbf{M}\,\frac{d}{\pi(R_1 + R_2)} = -11.0\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\ \text{kA/m},$$

mentre in aria

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \approx \mathbf{M}\left[1 - \frac{d}{\pi(R_1 + R_2)}\right] = 0.459\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\ \text{MA/m}.$$

Esercizio 3

Un condensatore cilindrico di raggi interno ed esterno $R_1 = 1.9$ cm e $R_2 = 2.3$ cm e lunghezza $L = 1$ m è riempito con un materiale di conduttività $\sigma = 2.0 \times 10^{-12}\ \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$. Il condensatore è caricato ad una tensione $V_0 = 0.22$ kV e disconnesso dal generatore al tempo $t = 0$. Si calcoli:

a) la capacità C del condensatore;

b) il campo elettrico $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ e la densità di corrente di conduzione $\mathbf{J}_c(t, \mathbf{r})$ all'interno del condensatore;

c) la corrente di spostamento $\mathbf{J}_D(t, \mathbf{r})$ e il campo magnetico $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$.

Svolgimento:

a) Le linee di forza dei campi sono radiali. Per il teorema di Gauss applicato ad una superficie cilindrica Σ di raggio r e altezza L coassiale e interna al condensatore

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = E_r 2\pi r L = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \qquad C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\displaystyle\int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} = 291\ \text{pF};$$

b) il condensatore è allo stesso tempo una resistenza di valore

$$R = \frac{1}{\sigma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{2\pi r L} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\sigma L} = \frac{\epsilon_0}{\sigma C} = 15.2 \text{ G}\Omega.$$

Evidentemente i due elementi sono sottoposti alla stessa tensione:

$$RI(t) = \frac{Q(t)}{C} \qquad \text{dove} \qquad I(t) = -\frac{dQ}{dt} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} = -\frac{dt}{\epsilon_0/\sigma}.$$

Si ha quindi $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$ dove $\tau = \epsilon_0/\sigma = 4.43$ s. Anche per la tensione vale $V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ e quindi

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{CV(t)}{2\pi\epsilon_0 L r}\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{V_0 e^{-t/\tau}}{r \ln(R_2/R_1)}\,\hat{\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{J}_c(t, \mathbf{r}) = \sigma\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma V_0 e^{-t/\tau}}{r \ln(R_2/R_1)}\,\hat{\mathbf{r}};$$

c) la corrente di spostamento è

$$\mathbf{J}_D(t, \mathbf{r}) = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\sigma V_0 e^{-t/\tau}}{r \ln(R_2/R_1)}\,\hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{J}_c(t, \mathbf{r}) \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = 0.$$