Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 12/11/2021

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Una sfera di raggio $R = 1.3$ cm di un materiale dielettrico lineare, omogeneo e isotropo di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2.3$ è carica con densità di carica di volume uniforme $\varrho_{\rm lib} = 0.53\ \mu$C/m^3. Si determini:

a) il campo elettrico $\mathbf{E}(r, 0, 0)$; si specifichi in particolare il campo elettrico nelle vicinanze di $r = R$;

b) il potenziale $\varphi(r, 0, 0)$; si specifichi in particolare il potenziale nelle vicinanze di $r = 0$ e di $r = R$;

c) l'energia elettrostatica U del sistema.

Svolgimento:

a) Applichiamo il teorema di Gauss allo spostamento elettrico $\mathbf{D}$ per una superficie sferica concentrica con la sfera:

$$\Phi(\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D_r(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_{\rm lib} & (r \le R) \\ \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_{\rm lib} & (r \ge R). \end{cases}$$

Si ha

$$D_r(r) = \frac{\varrho_{\rm lib}}{3} r, \qquad E_r(r) = \frac{\varrho_{\rm lib}}{3\epsilon_0\epsilon_r} r, \qquad (r < R)$$

$$D_r(r) = \frac{\varrho_{\rm lib} R^3}{3r^2}, \qquad E_r(r) = \frac{\varrho_{\rm lib} R^3}{3\epsilon_0 r^2}, \qquad (r > R)$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m; in particolare allora

$$E_r(R_-) = \frac{\varrho_{\rm lib} R}{3\epsilon_0\epsilon_r} = 113\ \text{V/m}, \qquad E_r(R_+) = \frac{\varrho_{\rm lib} R}{3\epsilon_0} = 260\ \text{V/m};$$

b) prendendo come riferimento l'infinito

$$\varphi(r) = \int_r^\infty E_r(r)\, dr = \begin{cases} \dfrac{\varrho_{\rm lib} R^3}{3\epsilon_0 r} & (r \ge R) \\ \dfrac{\varrho_{\rm lib} R^2}{3\epsilon_0} + \dfrac{\varrho_{\rm lib}}{6\epsilon_0\epsilon_r}(R^2 - r^2) & (r \le R). \end{cases}$$

In particolare allora

$$\varphi(R_-) = \varphi(R_+) = \frac{\varrho_{\rm lib} R^2}{3\epsilon_0} = 3.37\ \text{V}, \qquad \varphi(0) = \frac{\varrho_{\rm lib} R^2}{3\epsilon_0}\left(1 + \frac{1}{2\epsilon_r}\right) = 4.11\ \text{V};$$

c)

$$U = \int \frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2}\, dV = \frac{2\pi\varrho_{\rm lib}^2}{9\epsilon_0\epsilon_r}\int_0^R r^4\, dr + \frac{2\pi R^6 \varrho_{\rm lib}^2}{9\epsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{2\pi R^5 \varrho_{\rm lib}^2}{45\epsilon_0\epsilon_r} + \frac{2\pi R^5\varrho_{\rm lib}^2}{9\epsilon_0} = 8.94\ \text{pJ}.$$

Esercizio 2

Un condensatore a facce piane e parallele di area $S = 130$ cm^2 poste a distanza $d = 1.9$ cm è riempito di azoto a pressione $P = 1.0$ atm e temperatura $T = 300$ K ed è carico ad una differenza di potenziale $\Delta V = 0.97$ kV. Il gas è esposto ad una lampada a raggi X che ionizza (uniformemente nel volume) una certa frazione delle molecole di ${}^{14}_{7}N_2$; gli ioni si raccolgono al catodo generandovi una corrente $I = 1.7\ \mu$A. Sapendo che nel gas il cammino libero medio delle molecole è $\lambda = 0.11\ \mu$m, si calcoli:

a) la conduttività σ del gas ionizzato;

b) il tempo medio τ tra due collisioni di uno ione ${}^{14}_{7}N_2^+$;

c) la frazione f di molecole ionizzate.

Svolgimento:

a)

$$\sigma = \frac{I}{S}\frac{d}{\Delta V} = 2.56 \times 10^{-9}\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1} = 2.56\ \mathrm{nS/m};$$

b)

$$\tau = \frac{\lambda}{\sqrt{\langle v^2 \rangle}};$$

essendo

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\mathrm{N}_2}}} = \sqrt{\frac{3kT}{28\ \mathrm{uma}}} = 517\ \mathrm{m/s}$$

dove $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K e 1 uma $= 1.66 \times 10^{-27}$ kg, si ha

$$\tau = 213\ \mathrm{ps};$$

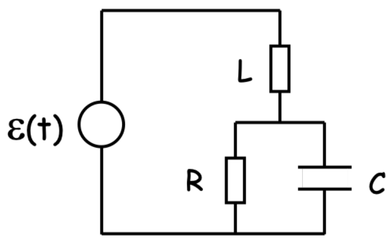
c)

$$\sigma = \frac{n_{\mathrm{N}_2^+} e^2 \tau}{m_{\mathrm{N}_2}} \qquad \longrightarrow \qquad n_{\mathrm{N}_2^+} = \frac{\sigma m_{\mathrm{N}_2}}{e^2 \tau} = 2.19 \times 10^{13}\ \mathrm{m}^{-3} \qquad \mathrm{e} \qquad f = \frac{n_{\mathrm{N}_2^+}}{n_{\mathrm{N}_2}},$$

dove $n_{\mathrm{N}_2^+}$ è la densità numerica degli ioni e n_{N_2} la densità delle molecole:

$$n_{\mathrm{N}_2} = \frac{N_A P}{RT} = 2.44 \times 10^{25}\ \mathrm{m}^{-3} \qquad \longrightarrow \qquad f = 8.94 \times 10^{-13},$$

dove $R = 8.31$ J/mole·K e $N_A = 6.02 \times 10^{23}$.



Esercizio 3

Nel circuito in figura $L = 5.3$ mH, $R = 970\ \Omega$, $C = 0.47\ \mu$F, $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, con $\mathcal{E}_0 = 24$ V. Si determini:

a) la corrente a frequenza zero $\hat{I}(0)$ e la corrente a frequenza infinita $\hat{I}(\infty)$;

b) le espressioni dell'impedenza del circuito e della corrente $\hat{Z}(\omega)$ e $\hat{I}(\omega)$;

c) la pulsazione di risonanza del circuito ω_0, la corrispondente corrente alla risonanza $I(\omega_0)$ e la fase della corrente alla risonanza $\phi(\omega_0)$;

d) il fattore di merito Q_0 del circuito alla frequenza di risonanza e la larghezza $\Delta\omega$ della curva di risonanza.

Svolgimento:

a)

$$\hat{I}(0) = \frac{\mathcal{E}}{R} = 24.7\ \mathrm{mA}, \qquad\qquad \hat{I}(\infty) = 0;$$

b)

$$\hat{Z}(\omega) = i\omega L - \frac{\dfrac{iR}{\omega C}}{R + \dfrac{1}{i\omega C}} = \frac{iR\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) + \dfrac{L}{C}}{R + \dfrac{1}{i\omega C}}, \qquad \hat{I}(\omega) = \mathcal{E}\frac{R + \dfrac{1}{i\omega C}}{iR\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) + \dfrac{L}{C}};$$

c)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 20.0 \text{ krad/s},$$

$$I(\omega_0) = \mathcal{E}\sqrt{\frac{R^2C^2}{L^2} + \frac{C}{L}} = 2.08 \text{ A}, \qquad \phi(\omega_0) = -\arctan\frac{1}{\omega_0 RC} = -\arctan\sqrt{\frac{L}{CR^2}} = -6.25°;$$

d)

$$\frac{I(\omega)}{I(\omega_0)} = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2R^2C^2\left(1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}},$$

$$Q_0 = \omega_0 RC = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 9.13, \qquad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{1}{RC} = 2.19 \text{ krad}.$$