Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 17/06/2022

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Si calcoli:

a) l'energia elettrostatica U_e di una carica elettrica $q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C distribuita uniformemente su una superficie sferica di raggio $r_e = 2.8$ fm; si calcoli anche l'energia U'_e della stessa distribuzione di carica nel caso in cui la sfera sia piena di un materiale dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3.1$;

b) l'energia elettrostatica U di una carica elettrica $Q = 7.4 \times 10^{-18}$ C distribuita uniformemente all'interno di una sfera di raggio $R = 7.1$ fm; si calcoli anche l'energia elettrostatica U' della stessa distribuzione di carica nel caso in cui il volume della sfera sia polarizzabile con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3.1$.

c) Supponendo di avere due cariche Q distribuite uniformemente all'interno di due sfere di raggio R si calcoli l'energia ΔU necessaria per ottenere una singola sfera di carica $2Q$ con la stessa densità di carica di volume delle due cariche componenti.

Svolgimento:

a)

$$U_e = \frac{1}{2}\int \sigma\phi\, dS = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r_e} = 4.11 \times 10^{-14}\ \text{J} = 257\ \text{keV} = U'_e$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

b)

$$U = \int \varphi_Q\, dQ = \int_0^R \frac{(4/3)\pi r^3 \varrho}{4\pi\epsilon_0 r}\varrho\, 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi\varrho^2 R^5}{15\epsilon_0} = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = 4.16 \times 10^{-11}\ \text{J} = 260\ \text{MeV}$$

Scriviamo l'energia come

$$U = \frac{1}{2}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\, dV.$$

Esternamente alla sfera i campi elettrici non sono alterati dalla presenza del dielettrico. All'interno lo è solo $\mathbf{E}$. Si ha quindi

$$U' - U = \frac{1}{2}\int_{\text{sfera}} (\mathbf{E}' - \mathbf{E})\cdot\mathbf{D}\, dV = \frac{1-\epsilon_r}{2\epsilon_r}\int_0^R \frac{\varrho^2 r^2}{9\epsilon_0} 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi\varrho^2 R^5 (1-\epsilon_r)}{90\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{Q^2(1-\epsilon_r)}{40\pi\epsilon_0\epsilon_r R}$$

Si ha quindi

$$U' = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q^2(1-\epsilon_r)}{40\pi\epsilon_0\epsilon_r R} = U\,\frac{1+5\epsilon_r}{6\epsilon_r} = 3.69 \times 10^{-11}\ \text{J} = 231\ \text{MeV}$$

c)

$$\Delta U = \frac{3}{5}\frac{(2Q)^2}{4\pi\epsilon_0 R'} - 2U = 2U\left(2^{2/3} - 1\right) = 4.89 \times 10^{-11}\ \text{J} = 306\ \text{MeV}$$

Esercizio 2

Un cilindretto di materiale paramagnetico di permeabilità magnetica relativa $\mu_r = 3.1$ è sospeso sulla bocca di un solenoide semi-infinito di raggio $R = 4.9$ cm con $n = 33$ spire/cm percorse da una corrente $I = 13$ A. Il cilindretto ha diametro $D = 3.7$ mm e altezza $h = 1.1$ mm. Si calcoli

a) l'espressione del campo magnetico $\mathbf{B}(z)$ sull'asse del solenoide in funzione della distanza z dalla bocca;

b) l'espressione del momento magnetico $\boldsymbol{\mu}(z)$ del cilindretto in funzione della distanza z del suo centro dalla bocca del solenoide;

c) l'espressione della forza $\mathbf{F}(z)$ esercitata sul cilindretto; *facoltativamente* si calcoli la posizione z_0 nella quale la forza magnetica sul cilindretto è più intensa e il valore $\mathbf{F}(z_0)$ di tale forza.

Svolgimento:

a)

$$\begin{aligned} B_z(z) &= \frac{\mu_0}{2}\, nIR^2 \int_{-\infty}^{0} \frac{dz'}{[R^2+(z-z')^2]^{3/2}} = -\frac{\mu_0}{2}\, nI \left[\frac{z-z'}{\sqrt{R^2+(z-z')^2}}\right]_{-\infty}^{0} = \\ &= \frac{\mu_0}{2}\, nI \left[1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]; \end{aligned}$$

b)

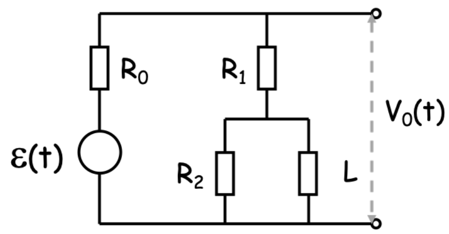
$$\mu_z(z) = V\chi_m H_z(z) = \frac{\pi D^2 h}{4}\chi_m \frac{nI}{2\mu_r}\left[1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right];$$

c)

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}) = \frac{\pi D^2 h}{4}\,\frac{\mu_0\chi_m n^2 I^2}{4\mu_r}\,\frac{\partial}{\partial z}\left[1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]^2 = \\ &= \frac{\pi D^2 h}{4}\,\frac{\mu_0\chi_m n^2 I^2}{2\mu_r}\left[1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\left[\frac{z^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right], \end{aligned}$$

$$\frac{dF_z}{dz} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad z_0 = -\frac{R}{\sqrt{15}}, \qquad F_z(z_0) = -2.18\times 10^{-8}\ \mathrm{N}.$$

Esercizio 3



Nel circuito in figura $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos\omega t$ con $\mathcal{E}_0 = 24$ V, $R_0 = 0.47$ kΩ, $R_1 = 33$ Ω, $R_2 = 7.9$ kΩ e $L = 13$ mH. Si calcolino:

a) le correnti erogate dal generatore $\hat{I}(0)$ e $\hat{I}(\infty)$ a frequenze zero e infinito e le corrispondenti tensioni di uscita $\hat{V}_0(0)$ e $\hat{V}_0(\infty)$;

b) le espressioni dell'impedenza del circuito $\hat{Z}(\omega)$ e della corrente $\hat{I}(\omega)$;

c) le espressioni del modulo della tensione di uscita $|\hat{V}_0(\omega)|$ e della sua fase $\phi(\omega)$; *facoltativamente* si calcoli la frequenza ν_0 per la quale $\phi(\nu_0)$ è massima e il valore di $\phi(\nu_0)$.

Svolgimento:

a)

$$\hat{I}(0) = \frac{\mathcal{E}_0}{R_0+R_1} = 47.7\ \mathrm{mA}, \qquad \hat{I}(\infty) = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{R_0+R_1+R_2} = 28.6\ \cos\omega t\ \mathrm{mA},$$

$$\hat{V}_0(0) = \mathcal{E}_0\frac{R_1}{R_0+R_1} = 1.57\ \mathrm{V}, \qquad \hat{V}_0(\infty) = \hat{\mathcal{E}}\frac{R_1+R_2}{R_0+R_1+R_2} = 22.7\ \cos\omega t\ \mathrm{V};$$

b)

$$\hat{Z}(\omega) = R_0 + R_1 + \frac{i\omega L R_2}{R_2 + i\omega L}, \qquad \hat{I}(\omega) = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{\hat{Z}} = \frac{\mathcal{E}_0(R_2 + i\omega L)}{(R_0 + R_1)R_2 + i\omega L(R_0 + R_1 + R_2)};$$

c)

$$\frac{|\hat{V}_0(\omega)|}{\mathcal{E}_0} = \sqrt{\frac{(R_1 R_2)^2 + \omega^2 L^2 (R_1 + R_2)^2}{R_2^2 (R_0 + R_1)^2 + \omega^2 L^2 (R_0 + R_1 + R_2)^2}},$$

$$\phi = \arctan\left[\frac{\omega L (R_1 + R_2)}{R_1 R_2}\right] - \arctan\left[\frac{\omega L (R_0 + R_1 + R_2)}{(R_0 + R_1) R_2}\right],$$

$$\frac{d\phi}{d\omega} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \nu_0 = \frac{R_2}{2\pi L}\sqrt{\frac{R_1 (R_0 + R_1)}{(R_1 + R_2)(R_0 + R_1 + R_2)}} = 1.53 \text{ kHz}, \qquad \phi(\nu_0) = 60.5^\circ.$$