Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 13/12/2022

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Un dipolo puntiforme $p_z = 0.53$ fC·m si trova a distanza $z_0 = 13$ μm dal piano conduttore xy mantenuto a potenziale nullo. Si calcoli:

a) la forza $\mathbf{F}$ ed il momento torcente $\mathbf{M}$ che agiscono sul dipolo;

b) la carica di superficie totale σ_0 presente sul piano conduttore;

c) l'espressione del potenziale $\varphi(\mathbf{r})$ nel semispazio $z > 0$ per $r \gg z_0$.

Svolgimento:

a) L'immagine del dipolo è un dipolo $p'_z = p_z$ posto in $z'_0 = -z_0$. La forza su p_z è dovuta al campo elettrico $\mathbf{E}'(0, 0, z_0) = E'_z(0, 0, z_0)\,\hat{\mathbf{z}}$ generato dall'immagine:

$$F_z = p_z \frac{\partial E'_z}{\partial z} = \frac{2p_z^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{(z + z_0)^3}\bigg|_{z=z_0} = -\frac{3p_z^2}{32\pi\epsilon_0 z_0^4} = -33.2 \text{ mN}, \qquad \mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = 0$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

b)

$$\sigma_0 = 0;$$

c)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r_0})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_0}|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{r_0})}{|\mathbf{r} + \mathbf{r_0}|^3} = \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r_0})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_0}|^3} + \frac{(\mathbf{r} + \mathbf{r_0})}{|\mathbf{r} + \mathbf{r_0}|^3}\right] \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

Esercizio 2

Un filo rettilineo di diametro $2a = 1.1$ mm è percorso da una densità uniforme di corrente per unità di volume $J_z = 0.53$ MA/m^2. Si calcoli:

a) il potenziale vettore $\mathbf{A}_1(\rho_0)$ in un piano ortogonale al filo a distanza $\rho_0 = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} =$ 3.1 mm dal suo centro;

b) il campo magnetico $\mathbf{B}_1(\rho_0)$ nello stesso punto.

Si dispone un secondo filo identico al primo e parallelo ad esso col centro a distanza $\Delta\boldsymbol{\rho} = -\Delta y\,\hat{\mathbf{y}}$ dal centro del primo; il secondo filo porta una densità di corrente per unità di volume $-\mathbf{J}$. Si calcoli:

c) l'espressione del potenziale vettore $\mathbf{A}_2(\boldsymbol{\rho})$ nel piano ortogonale al filo nel generico punto $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ per $\rho \gg \Delta y$.

Svolgimento:

a) scegliendo arbitrariamente la superficie del filo come riferimento del potenziale

$$A_{1z}(\rho_0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\frac{a}{\rho_0} = -1.71\ \mu\text{T} \cdot \text{m}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m e $I = J_z\,\pi a^2$;

b)

$$B_{1\phi}(\rho_0) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho_0} = 3.21 \text{ G};$$

c) scegliamo lo zero del potenziale a metà strada tra i due fili:

$$A_{2z}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln\frac{\Delta y/2}{|\boldsymbol{\rho}+\Delta\boldsymbol{\rho}/2|} - \ln\frac{\Delta y/2}{|\boldsymbol{\rho}-\Delta\boldsymbol{\rho}/2|}\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{|\boldsymbol{\rho}+\Delta y\,\hat{\mathbf{y}}/2|}{|\boldsymbol{\rho}-\Delta y\,\hat{\mathbf{y}}/2|} =$$

$$\approx \frac{\mu_0 I}{2\pi}\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\ln\rho = \frac{\mu_0\, I\Delta y}{2\pi}\frac{y}{\rho^2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{|\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{\rho}|}{\rho^2}$$

dove $\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{J}\times\Delta\boldsymbol{\rho})\,\pi a^2 = I\Delta y\,\hat{\mathbf{x}}$ è il momento magnetico per unità di lunghezza.

Esercizio 3

Un solenoide cilindrico di raggio $\rho_s = 2.3$ cm è formato da $n = 11$ spire/cm di un materiale di conduttività $\sigma_s = 5.9\times10^7\ (\Omega\cdot\text{m})^{-1}$ avvolte in un singolo strato compatto e percorse da una corrente $I = I_0\cos\omega t$, dove $I_0 = 2.3$ A e $\omega = 314$ rad/s. Si calcoli:

a) l'induttanza esterna L del solenoide per unità di lunghezza e la fase ϕ_V della tensione rispetto alla corrente;

b) il valore massimo $u_{\text{m,s}}$ della densità di volume dell'energia magnetica nel solenoide e il valore massimo $u_{\text{e,s}}$ della densità di volume dell'energia elettrica.

Un condensatore piano è formato da due lastre circolari di raggio $\rho_c = 8.3$ cm distanti $d = 1.1$ cm la cui differenza di tensione è $V = V_0\cos\omega t$, dove $V_0 = 0.31$ kV e $\omega = 314$ rad/s. Lo spazio tra le lastre è occupato da un materiale di conduttività $\sigma_c = 5.9\times10^{-9}\ (\Omega\cdot\text{m})^{-1}$ Trascurando gli effetti di bordo si calcoli:

c) la capacità C del condensatore e la fase ϕ_I della corrente rispetto alla tensione;

d) il valore massimo $u_{\text{e,c}}$ della densità di volume dell'energia elettrica nel condensatore e il valore massimo $u_{\text{m,c}}$ della densità di volume dell'energia magnetica.

Svolgimento:

a)

$$L = \mu_0 n^2\,\pi\rho_s^2 = 2.53\ \text{mH/m},$$

la resistenza delle spire per unità di lunghezza del solenoide è data da

$$R_m = \frac{\ell}{\sigma_s S} = \frac{2\pi\rho_s n}{\sigma_s\dfrac{\pi}{4n^2}} = 4.15\ \Omega.$$

Si ha quindi

$$\phi_V = \arctan\frac{\omega L}{R_m} = 10.8°;$$

b) il campo elettrico indotto per effetto Faraday è dato da

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 2\pi\rho E_\phi(t) = -\frac{\partial\Phi(\mathbf{B})}{\partial t} = \begin{cases} \pi\rho^2\,\omega\,\mu_0 n\,I_0\,\sin\omega t & (\rho\le\rho_s)\\[2ex] \pi\rho_s^2\,\omega\,\mu_0 n\,I_0\,\sin\omega t & (\rho\ge\rho_s)\end{cases}$$

In entrambi i casi si ha il massimo valore di E_ϕ per $\rho = \rho_s$:

$$E_{\phi,\max} = \rho_s\,\omega\,\mu_0 n I_0/2 = 11.5\ \text{mV/m}.$$

Le massime densità di energia magnetica ed elettrica sono quindi

$$u_{\text{m,s}} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I_0^2}{2} = 4.02\ \text{J/m}^3, \qquad u_{\text{e,s}} = \frac{\epsilon_0 E_{\phi,\max}^2}{2} = \frac{\rho_s^2\omega^2}{4c^2}u_{\text{m,s}} = 0.584\ \text{fJ/m}^3.$$

c)

$$C = \frac{\epsilon_0\pi\rho_c^2}{d} = 17.4\ \text{pF},$$

la resistenza del condensatore è data da

$$R_e = \frac{d}{\sigma_c\pi\rho_c^2} = 8.61\ \text{M}\Omega.$$

Si ha quindi

$$\phi_I = \arctan[\omega CR] = \arctan\frac{\epsilon_0\omega}{\sigma_c} = 2.70°;$$

d) il campo magnetico indotto dalla variazione del campo elettrico è dato da

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi\rho B_\phi(t) = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \Phi(\mathbf{E})}{\partial t} = \begin{cases} -\epsilon_0\mu_0\pi\rho^2\,\omega\,\dfrac{V_0}{d}\,\sin\omega t & (\rho \le \rho_c) \\ -\epsilon_0\mu_0\pi\rho_c^2\,\omega\,\dfrac{V_0}{d}\,\sin\omega t & (\rho \ge \rho_c) \end{cases}$$

In entrambi i casi si ha il massimo valore assoluto di B_ϕ per $\rho = \rho_c$:

$$|B_{\phi,\mathrm{max}}| = \epsilon_0\mu_0\rho_c\,\omega\,\frac{V_0}{2d} = 4.10 \text{ pT}.$$

Le massime densità di energia elettrica e magnetica sono quindi

$$u_{\mathrm{e,c}} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{\epsilon_0 V_0^2}{2d^2} = 3.54 \text{ mJ/m}^3, \qquad u_{\mathrm{m,c}} = \frac{B_{\phi,\mathrm{max}}^2}{2\mu_0} = \frac{\rho_c^2\omega^2}{4c^2} u_{\mathrm{e,c}} = 6.69 \times 10^{-18} \text{ J/m}^3.$$