Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 23/09/2022

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Una densità uniforme di carica di volume $\varrho_1 = 5.9\ \mu\text{C/m}^3$ occupa un guscio sferico di raggi interno ed esterno $r_1 = 1.1$ cm e $r_2 = 2.3$ cm. Concentrico al primo, un secondo guscio di materiale dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4.3$ ha raggi interno ed esterno r_2 e $r_3 = 4.7$ cm. A sua volta il dielettrico è contenuto in un guscio conduttore di raggi interno ed esterno r_3 e $r_4 = 9.7$ cm che è stato caricato con una carica $q_2 = 0.31$ nC. Si calcoli:

a) l'espressione del campo elettrico $E_1(r)$ nel primo guscio e il suo valore alla coordinata radiale $r_0 = 1.9$ cm;

b) la carica totale q_p nel dielettrico e la densità superficiale $\sigma_p(r_3)$ della carica di polarizzazione presente sulla superficie esterna del dielettrico;

c) la differenza di potenziale $\Delta V = V_3 - V_2$ tra le due superfici del dielettrico e il potenziale elettrostatico V_0 nel centro del sistema rispetto all'infinito.

Svolgimento:

a)

$$E_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\varrho_1 \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - r_1^3\right)}{r^2}, \qquad E_1(r_0) = 3.40\ \text{kV/m},$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

b) per la carica totale, $q_p = 0$. Indicando con

$$q_1 = \varrho_1 \frac{4}{3}\pi\left(r_2^3 - r_1^3\right) = 268\ \ \text{pC}$$

la carica contenuta nel primo guscio,

$$\sigma_p(r_3) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{q_1}{4\pi r_3^2} = 7.40\ \text{nC/m}^2;$$

c)

$$\Delta V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2}\right) = -12.4\ \text{V}, \qquad V_0 = \int_{r_1}^{r_2} E_1(r)\,dr - \Delta V + \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r_4} = 97.3\ \text{V}.$$

Esercizio 2

Un grosso solenoide superconduttore ha diametro $D = 6.0$ m e lunghezza $h = 12.5$ m e genera nel centro un campo magnetico $B = 4.0$ T con una corrente $i_0 = 19.1$ kA. Nell'approssimazione del solenoide infinito si calcoli:

a) la densità n delle spire e il valore dell'induttanza L_s;

b) la densità u_m dell'energia magnetica e la pressione meccanica P_m che si esercita sugli avvolgimenti.

c) Supponendo che la corrente sia fornita agli avvolgimenti con un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E} = 24$ V, si calcoli il tempo minimo T_m necessario a raggiungere la condizione di lavoro.

Svolgimento:

a)

$$n = \frac{B}{\mu_0 i_0} = 167\ \text{spire/m}, \qquad L_s = \mu_0 n^2 \frac{\pi D^2}{4} h = 12.3\ \text{H}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

b)

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = 6.37 \text{ MJ/m}^3, \qquad P_m = u_m = 6.37 \text{ MPa};$$

c) con un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E}$, la massima velocità di variazione $\dot{I}_m$ della corrente è definita da

$$\mathcal{E} - L_s \dot{I}_m = 0.$$

Il minimo tempo di carica è quindi

$$T_m = \frac{i_0}{\dot{I}_m} = \frac{i_0 L_s}{\mathcal{E}} = 9.82 \text{ ks}.$$

Esercizio 3

Un filo rettilineo indefinito si trova sull'asse di un solenoide toroidale a sezione quadrata di raggi interno ed esterno $r_1 = 5.9$ cm e $r_2 = 9.1$ cm e costituito da $N = 470$ spire di filo di rame di sezione $\Sigma = 0.97$ mm^2. Si calcoli:

a) il coefficiente di autoinduzione L_s del solenoide e il valore della sua resistenza R_s;

b) il coefficiente di mutua induzione M tra il solenoide e il filo e l'equazione differenziale per la corrente I_s che attraversa il solenoide;

c) la corrente $\hat{I}_s$ (ampiezza I_{s0} e fase ϕ_s) che attraversa il solenoide se la corrente nel filo è $I_f = I_{f0} \cos \omega t$ con $I_{f0} = 29$ A e $\omega = 314$ rad/s.

Svolgimento:

a)

$$L_s = N \frac{\Phi_s(B_s)}{I_s} = \mu_0 \frac{N^2(r_2 - r_1)}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = 613 \; \mu\text{H}, \qquad R_s = \rho_{\text{Cu}} \frac{4N(r_2 - r_1)}{\Sigma} = 1.05 \; \Omega$$

dove $\rho_{\text{Cu}} = 1.7 \times 10^{-8} \; \Omega \cdot \text{m}$;

b)

$$M = N \frac{\Phi_s(B_f)}{I_f} = \mu_0 \frac{N(r_2 - r_1)}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = 1.30 \; \mu\text{H}, \qquad -L_s \frac{dI_s}{dt} \pm M \frac{dI_f}{dt} = I_s R_s,$$

dove vale il segno positivo se i versi dei campi generati da correnti positive nel solenoide e nel filo sono discordi;

c)

$$i\omega L_s \hat{I}_s + \hat{I}_s R_s = \pm i\omega M \hat{I}_f \qquad \longrightarrow \qquad \hat{I}_s = \frac{\pm i\omega M \hat{I}_f}{R_s + i\omega L_s},$$

$$I_{s0} = \frac{\omega M I_{f0}}{\sqrt{R_s^2 + \omega^2 L_s^2}} = 11.1 \text{ mA}, \qquad \phi_s = \pm 90^\circ - \arctan \frac{\omega L_s}{R_s} = \pm 90^\circ - 10.3^\circ.$$