Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 02/09/2022

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Un condensatore piano è formato da due lastre metalliche parallele quadrate di lato $L = 5.3$ cm separate in aria da una distanza $d_0 = 4.3$ mm. Le lastre sono caricate ad una differenza di potenziale $V_0 = 120$ V. Si calcoli:

a) la capacità C_0 del sistema, la sua energia U_0 e il campo elettrico E_0 nello spazio tra le lastre.

Tra le due lastre si inserisce una lastra di dielettrico di spessore $d_1 = 1.3$ mm, costante dielettrica $\epsilon_r = 2.3$ e rigidità dielettrica $E_{\text{bd,dielettrico}} = 100$ kV/cm. Sapendo che l'aria secca ha rigidità dielettrica $E_{\text{bd,aria}} = 30$ kV/cm si calcoli:

b) la capacità C_V del sistema, e i campi elettrici $E_{V,\text{aria}}$ nell'aria e $E_{V,\text{dielettrico}}$ nel dielettrico.

c) Si ripeta il punto precedente supponendo di avere scollegato il condensatore dal generatore prima dell'inserimento della lastra. Si calcolino quindi C_Q, $E_{Q,\text{aria}}$ e $E_{Q,\text{dielettrico}}$.

Svolgimento:

a)

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 L^2}{d_0} = 5.78 \text{ pF}, \qquad U_0 = \frac{C_0 V_0^2}{2} = 41.6 \text{ nJ}, \qquad E_0 = \frac{V_0}{d_0} = 27.9 \text{ kV/cm};$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

b)

$$C_V = \frac{\dfrac{\epsilon_0 L^2}{d_0 - d_1}\dfrac{\epsilon_0 \epsilon_r L^2}{d_1}}{\dfrac{\epsilon_0 L^2}{d_0 - d_1} + \dfrac{\epsilon_0 \epsilon_r L^2}{d_1}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r L^2}{\epsilon_r (d_0 - d_1) + d_1} = 6.97 \text{ pF}.$$

Se il condensatore non scaricasse, i campi elettrici sarebbero dati dalle espressioni

$$E_{V,\text{aria}} = \frac{V_0 C_V}{\epsilon_0 L^2} = 33.7 \text{ kV/cm} \qquad \text{e} \qquad E_{V,\text{dielettrico}} = \frac{V_0 C_V}{\epsilon_0 \epsilon_r L^2} = 14.6 \text{ kV/cm},$$

ma essendo $E_{V,\text{aria}} > E_{\text{bd,aria}}$, il valore del campo elettrico in aria è $E'_{V,\text{aria}} = 0$. Di conseguenza

$$C'_V = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r L^2}{d_1} = 44.0 \text{ pF} \qquad \text{e} \qquad E'_{V,\text{dielettrico}} = \frac{V_0}{d_1} = \frac{V_0 C'_V}{\epsilon_0 \epsilon_r L^2} = 92.3 \text{ kV/cm} < E_{\text{bd,dielettrico}};$$

c)

$$C_Q = C_V, \qquad E_{Q,\text{aria}} = E_0, \qquad E_{Q,\text{dielettrico}} = \frac{E_{Q,\text{aria}}}{\epsilon_r} = 12.1 \text{ kV/cm} < E_{\text{bd,dielettrico}}.$$

Esercizio 2

Nel circuito in figura $\mathcal{E} = 12$ V, $R_0 = 1.9\ \Omega$, $R_1 = 9.7\ \Omega$, $R_2 = 4.3\ \Omega$ e $C = 1.7\ \mu$F. Si determinino:

a) le correnti erogate dal generatore alla chiusura dell'interruttore $I(0)$ e a regime $I(\infty)$, la corrente $I_C(0)$ che entra nel capacitore all'istante $t = 0$ e la tensione sul capacitore $V_C(\infty)$ a regime;

b) le costanti di tempo di carica τ_c e di scarica τ_s del condensatore.

Svolgimento:

a)

$$I(0) = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = 2.46 \text{ A}; \qquad I(\infty) = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + R_1} = 1.03 \text{ A}$$

$$I_C(0) = \frac{\mathcal{E} - I(0)R_0}{R_2} = 1.70 \text{ A} \qquad V_C(\infty) = I(\infty)R_1 = 10 \text{ V};$$

b) per la fase di carica, tenendo conto che $I_1 = I - dQ/dt$ le equazioni di Kirchhoff si scrivono

$$\mathcal{E} - R_0 I - R_1 \left[I - \frac{dQ}{dt} \right] = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{E} - R_0 I - R_2 \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0.$$

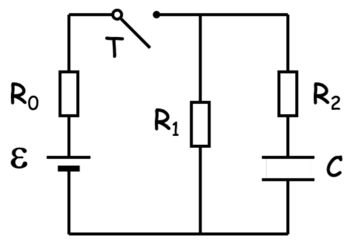
Ricavando I da una di queste, e sostituendo nell'altra si ha

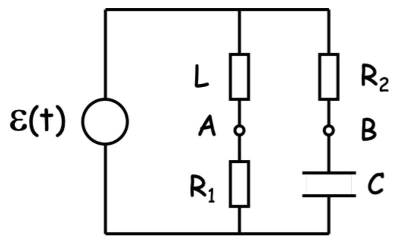
$$\frac{dQ}{dt}(R_0 R_1 + R_1 R_2 + R_2 R_0) = -\frac{Q}{C}(R_0 + R_1) + \mathcal{E} R_1$$

da cui

$$\tau_c = \frac{R_0 R_1 + R_1 R_2 + R_2 R_0}{R_0 + R_1} C = 10.0 \ \mu\text{s}.$$

Per la fase di scarica, invece, $\tau_s = (R_1 + R_2)\, C = 23.8 \ \mu$s.





Esercizio 3

Per il circuito in figura con $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ si calcoli:

a) l'espressione della corrente $\hat{I}(\omega)$ erogata dal generatore in funzione della pulsazione ω; si calcoli l'ampiezza I e la fase ϕ_I della corrente per $\mathcal{E} = 0.31$ kv, $\omega'/2\pi = 50$ Hz, $R_1 = 97\ \Omega$, $R_2 = 91\ \Omega$, $L = 0.47$ H e $C = 83\ \mu$F; *facoltativamente* si calcoli l'espressione della frequenza di risonanza ν_0 e il suo valore;

b) l'espressione della differenza di fase $\Delta\phi_I$ tra la corrente nel ramo induttivo e quella nel ramo capacitivo in funzione della pulsazione ω e il suo valore per i valori circuitali dati;

c) l'espressione della differenza di potenziale $\hat{V}_{\text{AB}}$ tra i punti A e B.

Svolgimento:

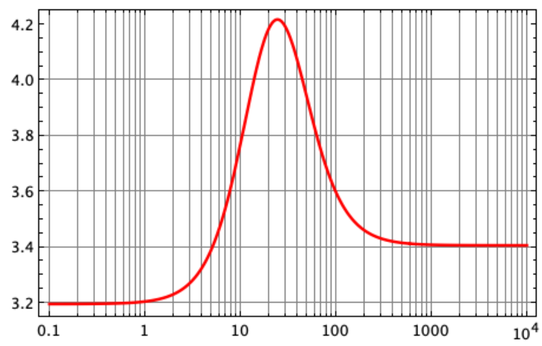
a)

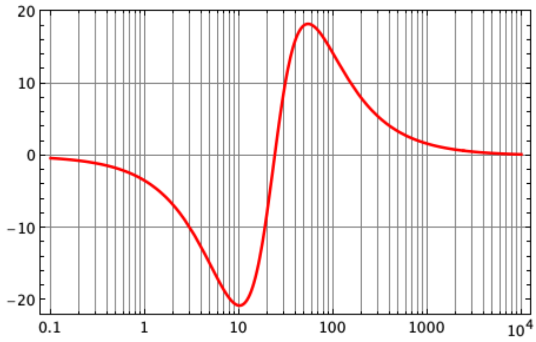
$$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{R_1 + i\omega L} + \frac{\hat{\mathcal{E}}}{R_2 + \dfrac{1}{i\omega C}} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{\hat{Z}}, \qquad \hat{Z} = \frac{(R_1 + i\omega L)\left(R_2 + \dfrac{1}{i\omega C}\right)}{R_1 + R_2 + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}},$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L^2}\sqrt{R_2^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}} = 3.86 \text{ A},$$

$$\phi_I = \arctan \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R_1 + R_2} - \arctan \frac{\omega L}{R_1} + \arctan \frac{1}{\omega R_2 C} = 17.6°,$$

$$\phi_I(\nu_0) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}\frac{R_1^2 C - L}{R_2^2 C - L}} = 26.1 \text{ Hz};$$





b)

$$\Delta\phi_I = -\arctan\frac{\omega L}{R_1} - \arctan\frac{1}{\omega R_2 C} = -79.5^\circ;$$

c)

$$\hat{V}_{\mathrm{AB}} = \frac{\hat{\mathcal{E}} R_1}{R_1 + i\omega L} - \left[\hat{\mathcal{E}} - \frac{\hat{\mathcal{E}} R_2}{R_2 + \dfrac{1}{i\omega C}}\right].$$