Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 01/09/2023

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Attorno a quattro cariche positive elementari $+e$ raggruppate in uno stesso punto sono distribuite simmetricamente nel piano xy quattro cariche negative $-e$ a distanza $a = 0.53$ Å da queste. Si determini:

a) quale sia il primo ordine di multipolo non nullo della distribuzione di cariche; si giustifichi la risposta calcolando il potenziale elettrico generato dalla distribuzione nel punto $(0, 0, z)$, con $z \gg a$;

b) l'energia elettrostatica U_{es} del sistema;

c) il lavoro $\mathcal{L}$ necessario per rimuovere la carica centrale dal sistema.

Svolgimento:

a) quadrupolo. Infatti:

$$\varphi(0,0,z) = \frac{4e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2ea^2}{z^3}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

b)

$$U_{\text{es}} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\left\{4\left[\frac{2}{\sqrt{2}a} + \frac{1}{2a} - \frac{4}{a}\right] - 4\frac{4}{a}\right\} = \frac{e^2\left(2\sqrt{2}-15\right)}{4\pi\epsilon_0 a} = -5.29 \times 10^{-17}\ \text{J} = -330\ \text{eV}$$

dove $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C;

c)

$$\mathcal{L} = U'_{\text{es}} - U_{es} = \frac{16e^2}{4\pi\epsilon_0 a} = -4e\varphi(0,0,0) = 6.95 \times 10^{-17}\ \text{J} = 434\ \text{eV}.$$

Esercizio 2

Una sbarra magnetica di lunghezza $L = 67$ cm, di sezione $\Sigma = 1.1$ cm^2 e massa $m = 0.58$ kg è sospesa per un estremo e immersa in un campo magnetico orizzontale $B = 0.47$ T. Se la densità di magnetizzazione della sbarra è $M = 0.89$ MA/m si calcoli:

a) il momento magnetico μ della sbarra;

b) l'angolo θ che la sbarra forma con la verticale;

c) l'energia magnetica $U_m(\theta)$ associata con questa posizione angolare.

Svolgimento:

a)

$$\mu = ML\Sigma = 65.6\ \text{Am}^2;$$

b) sulla sbarra agiscono e si fanno equilibrio il momento torcente dovuto al campo magnetico $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ e quello dovuto al peso $\mathbf{L} \times m\mathbf{g}/2$:

$$mg\frac{L}{2}\sin\theta = \mu B\cos\theta \qquad \longrightarrow \qquad \theta = \arctan\frac{2\mu B}{mgL} = 9.18^\circ,$$

dove $g = 9.81$ m/s^2;

c)

$$U_m(\theta) = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} = -\mu B\sin\theta = -49.2\ \text{mJ}.$$

Esercizio 3

Una superficie cilindrica indefinita di raggio $R_0 = 37$ cm è uniformemente carica con densità superficiale $\sigma = 1.1\ \mu$C/m^2. La si mette in rotazione attorno al proprio asse a velocità angolare $\omega_0 = 6.7$ krad/s, accelerandolo con la legge oraria $\omega(t) = \alpha t^2/2$, dove $\alpha = 9.7$ rad/s^3. Si calcoli:

a) il campo magnetico $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ in tutto lo spazio ;

b) il lavoro per unità di lunghezza $\mathcal{L}$ necessario per accelerare il cilindro;

c) l'espressione del campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ in tutto lo spazio e la densità della corrente di spostamento $\mathbf{J}_D(\mathbf{r}, t)$. Di questa grandezza si calcoli il valore numerico alla superficie del cilindro di raggio R_0.

Svolgimento:

a) all'interno del cilindro
$$B_z = \mu_0 \sigma\, \omega R_0 = 3.43 \text{ nT}$$
dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

b) il lavoro speso corrisponde all'energia del campo magnetico:
$$\mathcal{L} = \frac{B_z^2}{2\mu_0}\pi R_0^2 = \frac{\pi \mu_0 \sigma^2 \omega_0^2 R_0^4}{2} = 2.01 \text{ pJ/m};$$

c) esternamente al cilindro il campo elettrico ha una componente radiale indipendente dal tempo
$$E_\rho(R) = \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0 R}.$$
Le componenti azimutali delle due grandezze sono invece diverse da zero solo nell'intervallo di tempo $0 < t < \sqrt{2\omega_0/\alpha} = 37.2$ s. Per $R \le R_0$
$$E_\phi(R) = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial \Phi_R(\mathbf{B})}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \sigma R_0 R\, \alpha t}{2}, \qquad J_D(R) = \epsilon_0 \frac{\partial E_\phi}{\partial t} = -\frac{\sigma R_0 R\, \alpha}{2c^2}$$
dove $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3.0 \times 10^8$ m/s. Per $R = R_0$
$$J_D(R_0) = -\frac{\sigma\, R_0^2 \alpha}{2c^2} = 8.12 \times 10^{-24} \text{ A/m}^2.$$
Per $R \ge R_0$
$$E_\phi(R) = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial \Phi_{R_0}(\mathbf{B})}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \sigma R_0^3\, \alpha t}{2R}, \qquad J_D(R) = -\frac{\sigma R_0^3\, \alpha}{2c^2 R}.$$