Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 16/06/2023

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Due sferette conduttrici uguali di raggio $a = 7.2$ mm e massa $m = 0.21$ g sono sospese a due fili isolanti di lunghezza $L = 53$ cm fissati ad un medesimo punto. Mentre sono a contatto ricevono una carica complessiva q e trovano poi una nuova posizione di equilibrio a distanza $d = 11$ cm tra loro. Si calcoli:

a) il valore della carica q;

b) il campo elettrico $E_1(a)$ e il potenziale $\phi_1(a)$ alla superficie della prima sfera;

c) l'energia elettrostatica di interazione U_{int} delle due sfere e l'energia elettrostatica totale U_{tot} del sistema.

Svolgimento:

a) sulle sferette agiscono la forza peso verticale $\mathbf{P}$, la forza coulombiana orizzontale $\mathbf{F}_C$ e la tensione dei fili $\mathbf{T}$, con $\mathbf{P} + \mathbf{F}_C + \mathbf{T} = 0$, dove

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}, \qquad \mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4d^3}\mathbf{d}, \qquad T = \sqrt{P^2 + F_C^2}$$

dove $g = 9.81$ m/s^2 e $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m. Indicando con α l'angolo tra i due fili

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2\sqrt{L^2 - d^2/4}} = \frac{F_C}{P} \qquad \longrightarrow \qquad q = \sqrt{\frac{16\pi\epsilon_0 d^3 mg}{\sqrt{4L^2 - d^2}}} = 34.0 \text{ nC};$$

b)

$$E_1(a) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{2a^2} = 2.95 \text{ MV/m}, \qquad \phi_1(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{2a} + \frac{q}{2d}\right] = 22.6 \text{ kV}$$

dove $\sigma_1 = \sigma_2$ sono le densità di carica delle due sfere, supposte uniformi, trascurando cioè il campo elettrico generato da una sfera alla posizione dell'altra. Si ha quindi $E_1(a) = E_2(a)$ e $\phi_1(a) = \phi_2(a)$;

c)

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{4d} = 23.6\ \mu\text{J}, \qquad U_{\text{tot}} = 2 \times \frac{1}{2}q_1\phi_1(a) = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{d}\right] = 385\ \mu\text{J}.$$

Esercizio 2

Un lungo nastro di un materiale dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4.1$ ha spessore $\Delta y = 1.7$ mm e altezza $\Delta x \gg \Delta y$ e scorre con velocità $v_z = 3.7$ m/s in un campo magnetico uniforme $B_x = 1.1$ T. Si calcoli:

a) l'espressione della forza magnetica $\mathbf{F}_m$ sentita da una carica q all'interno del materiale;

b) l'espressione della densità di polarizzazione $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ in funzione della forza magnetica e del campo elettrico $\mathbf{E}$; qual è l'origine di questo campo elettrico?

c) il valore della densità di polarizzazione $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ nel materiale e la differenza di potenziale ΔV tra le due facce del nastro.

Svolgimento:

a)

$$\mathbf{F}_m = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q\,v_z B_x\,\hat{\mathbf{y}};$$

b)

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \left(\frac{\mathbf{F}_m}{q} + \mathbf{E} \right)$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m. Il campo elettrico E è generato dalle cariche di polarizzazione che compaiono sulle superfici del nastro come un campo depolarizzante $E_y = -P_y/\epsilon_0$;

c) indichiamo con E_m il campo F_m/q. Si ha

$$\frac{P_y}{\epsilon_0 \chi_e} = E_m + E_y = v_z B_x - \frac{P_y}{\epsilon_0} \qquad \longrightarrow \qquad P_y = \epsilon_0 \frac{\chi_e}{\epsilon_r} v_z B_x = 27.2 \text{ pC/m}^2,$$

$$\Delta V = \frac{F_m}{q\epsilon_r} \Delta y = \frac{v_z B_x \Delta y}{\epsilon_r} = 1.69 \text{ mV}.$$

Esercizio 3

Un circuito quadrato rigido di lato $a = 29$ cm percorso da una corrente $I_1 = 8.9$ A è complanare con un filo rettilineo percorso da una corrente $I_2 = 37$ A ed ha due lati paralleli a questo, a distanze $d = 17$ cm e $d + a$. Si calcoli:

a) il coefficiente di mutua induzione M tra il quadrato e il filo;

b) l'energia di interazione U_{int} dei due circuiti;

c) le forze $\mathbf{F}_{1,2}$ agenti.

Svolgimento:

a)

$$M = \frac{\Phi_1(\mathbf{B}_2)}{I_2} = \pm \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d} = \pm\, 57.7 \text{ nH}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m e vale il segno + se i campi sono concordi all'interno del circuito quadrato;

b)

$$U_{\text{int}} = I_1 \Phi_1(\mathbf{B}_2) = M I_1 I_2 = \pm\, 19.0 \ \mu\text{J};$$

c) la forza $\mathbf{F}_1$ sul circuito quadrato è radiale rispetto al filo:

$$F_1 = \mp \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi} \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right] = \mp\, 70.8 \ \mu\text{N}, \qquad \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1.$$