Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova telematica d'esame di Fisica 2 – 06/05/2020 (giorno 78 CoViD19)

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Una sfera di raggio $R = 1.0$ cm è uniformemente carica con densità volumica di carica $\rho = 3.0\ \mathrm{nC/m^3}$. All'interno della sfera vi è un volume sferico vuoto di raggio $R_0 = 3.0$ mm con centro a distanza $d = 6.0$ mm dal centro della prima sfera. Si calcoli:

a) l'espressione del potenziale lontano dalla distribuzione di carica e il valore della carica totale Q e del vettore momento di dipolo $\mathbf{p}$;

b) il vettore campo elettrico $\mathbf{E}$ in tutti i punti della sfera più piccola.

Svolgimento:

a) In punti lontani dalla distribuzione di carica il potenziale può essere scritto come

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m,

$$Q = \int \rho\, dV = \frac{4}{3}\pi\rho\left(R^3 - R_0^3\right) = 1.22 \times 10^{-14}\ \mathrm{C}$$

e l'origine del sistema di riferimento è un punto arbitrariamente scelto nelle vicinanze della distribuzione di carica. Dato che la carica totale è non nulla, il valore del momento di dipolo

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})\, dV$$

dipende dalla scelta dell'origine. Se questo punto è al centro della sfera grande si ha

$$\mathbf{p} = -\frac{4}{3}\pi\rho R_0^3\, d\,\hat{\mathbf{d}} = -2.04 \times 10^{-18}\,\hat{\mathbf{d}}\ \mathrm{C\cdot m.}$$

dove $d\,\hat{\mathbf{d}}$ è il vettore dal centro della sfera grande a quello della sfera piccola;

b) per applicare il teorema di Gauss in un punto interno alla sfera piccola consideriamo il sistema come la sovrapposizione di due distribuzioni di carica, la prima sferica di raggio R e densità di carica ρ e la seconda di raggio R_0 e densità $-\rho$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi r_1^2}\frac{4}{3\epsilon_0}\pi\rho r_1^3\,\hat{\mathbf{r}}_1 - \frac{1}{4\pi r_2^2}\frac{4}{3\epsilon_0}\pi\rho r_2^3\,\hat{\mathbf{r}}_2$$

ed essendo $\mathbf{r}_1 = d\,\hat{\mathbf{d}} + \mathbf{r}_2$,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho d}{3\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{d}} = 678\,\hat{\mathbf{d}}\ \mathrm{mV/m.}$$

Esercizio 2

In un esperimento sull'effetto Hall una corrente $I = 23$ A scorre in un nastro di rame di larghezza $\Delta x = 2.0$ cm e spessore $\Delta y = 0.10$ mm immerso in un campo $B_y = 1.5$ T. Se si osserva una differenza di potenziale Hall $V_H = 196\ \mu$V, si determini

a) la densità n di portatori di carica nel metallo e la loro velocità di deriva v_d;

b) la forma delle superfici equipotenziali nel metallo e la componente z del campo elettrico in un punto nel piano del nastro immediatamente fuori del metallo.

Svolgimento:

a)

$$v_d = \frac{V_H}{B\Delta x} = 6.53 \text{ mm/s}, \qquad n = \frac{j}{e v_d} = \frac{IB}{eV_H \Delta y} = 1.10 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

dove $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C;

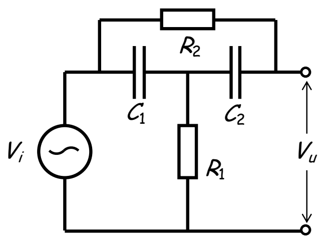
b) le superfici equipotenziali disegnano nel piano del nastro linee rette inclinate rispetto all'asse x di un angolo

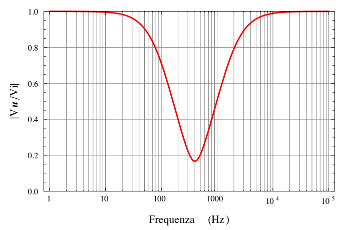
$$\theta = \pm \arctan \frac{E_x}{E_z} = \pm \arctan \frac{V_H}{\Delta x} \frac{1}{\rho j} = \pm \arctan \frac{V_H \Delta y}{\rho I} = \pm 2.87°$$

dove $\rho = 1.7 \times 10^{-8}$ Ω·m è la resistività del rame e il segno dipende dal segno dei portatori di carica. All'esterno del nastro

$$E_z = \rho j = \frac{\rho I}{\Delta x \Delta y} = 196 \text{ mV/m}.$$

Esercizio 3





Per il circuito in figura, di pulsazione ω,

a) determinare l'espressione della tensione di uscita V_u rispetto a quella di ingresso V_i e della pulsazione di risonanza ω_0; con $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 10$ kΩ e $C_1 = C_2$, si dimensioni il circuito per risuonare alla frequenza di 400 Hz;

b) si abbozzi il grafico della risposta in frequenza del circuito; a cosa potrebbe servire un circuito di questo tipo?

Svolgimento:

a) indicando con I_1 e I_2 le correnti circolanti in senso orario nelle due maglie $V_i C_1 R_1$ e $C_1 R_2 C_2$, le leggi di Kirchhoff applicate alle due maglie sono

$$\begin{aligned} V_i &= I_1 \frac{1}{i\omega C_1} - I_2 \frac{1}{i\omega C_1} + I_1 R_1 \\ 0 &= -I_1 \frac{1}{i\omega C_1} + I_2 \frac{1}{i\omega C_1} + I_2 R_2 + I_2 \frac{1}{i\omega C_2}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella prima equazione l'espressione di I_1 ricavata dalla seconda

$$I_1 = \left(1 + \frac{C_1}{C_2} + i\omega R_2 C_1\right) I_2$$

la tensione di uscita può essere scritta come

$$\begin{aligned} V_u = V_i - I_2 R_2 &= V_i \left[1 - \frac{\omega R_2 C_2}{\omega \left(R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2\right) + i\left(\omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 - 1\right)}\right] = \\ &= V_i \left[\frac{\omega R_1 \left(C_1 + C_2\right) + i\left(\omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 - 1\right)}{\omega \left(R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2\right) + i\left(\omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 - 1\right)}\right] \end{aligned}$$

da cui

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}} \qquad C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 400^2 R_1 R_2}} = 126 \text{ nF};$$

b) il filtro a T con ponte è un circuito semplice comunemente impiegato per deprimere le componenti di frequenza attorno ad ω_0.