

Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 01/09/2021

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Si abbia un condensatore sferico con elettrodo interno negativo di raggio $R_1 = 3.1$ cm ed elettrodo esterno positivo di raggi $R_2 = 5.8$ cm e $R_3 = 6.1$ cm riempito con un dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 7.1$. Si calcoli

- a) la capacità C_c del condensatore.

A grande distanza dal condensatore, isolato da questo, si trova una sfera metallica di raggio $R_s = 3.3$ cm su cui è stata depositata una carica $Q_s = +2.3$ nC. Sapendo che l'energia elettrostatica complessiva del sistema è $U = 3.7$ μ J si calcoli

- b) il valore $V_2 = V_3$ del potenziale dell'elettrodo esterno del condensatore e la differenza di potenziale $\Delta V_c = V_2 - V_1$.

Collegando elettricamente la sfera metallica all'elettrodo interno del condensatore si calcolino

- c) i nuovi valori della carica Q'_1 presente sull'elettrodo interno del condensatore, del potenziale $V'_2 = V'_3$ e della differenza di potenziale $\Delta V'_c = V'_2 - V'_1$.

Svolgimento:

- a)

$$C_c = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 52.6 \text{ pF},$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

- b) essendo nulla la carica complessiva $Q_1 + Q_2$ del condensatore, $V_2 = V_3 = 0$;

$$U = \frac{C_c(\Delta V_c)^2}{2} + \frac{Q_s^2}{2C_s} \quad \rightarrow \quad \Delta V_c = \sqrt{\frac{2}{C_c} \left(U - \frac{Q_s^2}{2C_s} \right)} = 337 \text{ V},$$

dove $C_s = 4\pi\epsilon_0 R_s = 3.67$ pF;

- c) la carica complessiva $Q_s + Q_1$ disponibile per la sfera e l'elettrodo interno del condensatore si ripartisce tra i due:

$$Q_s + Q_1 = Q_s - C_c \Delta V_c = Q'_s + Q'_1 \quad \rightarrow \quad Q'_1 = Q_1 + Q_s - Q'_s > Q_1$$

Sull'elettrodo esterno, oltre alla carica $Q'_2 = -Q'_1$ rimane quindi una carica $Q'_3 = Q_2 + Q'_1 = C_c \Delta V_c + Q'_1 = Q_s - Q'_s > 0$, che porta il potenziale del condensatore al valore $V'_3 = Q'_3 / (4\pi\epsilon_0 R_3)$, e quindi:

$$V'_3 = V'_1 + \Delta V'_c = V'_s + \Delta V'_c \quad \rightarrow \quad \frac{C_c \Delta V_c + Q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{Q_s - C_c \Delta V_c - Q'_1}{C_s} - \frac{Q'_1}{C_c}$$

da cui

$$Q'_1 = \left[\frac{Q_s}{C_s} - C_c \Delta V_c \left(\frac{1}{C_s} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_3} \right) \right] \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_s} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_3} \right)^{-1} = -15.5 \text{ nC},$$

$$V'_1 = V'_s = \frac{Q_s - C_c \Delta V_c - Q'_1}{C_s} = 28.6 \text{ V}, \quad \Delta V'_c = -\frac{Q'_1}{C_c} = 295 \text{ V},$$

$$V'_3 = \frac{C_c \Delta V_c + Q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 324 \text{ V}.$$

Esercizio 2

Calcolare l'espressione del potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ nel *gauge* di Coulomb

- in tutto lo spazio per un solenoide cilindrico indefinito di raggio R , con n spire per unità di lunghezza percorse da una corrente I ;
- sull'asse di un solenoide toroidale di raggio medio R e sezione $\Sigma \ll R^2$, con N spire percorse da una corrente I .

Svolgimento:

Sfruttando il parallelo tra le equazioni per \mathbf{B} e per \mathbf{A} ($\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$, $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) si può sostituire $\Phi(\mathbf{B})$ a $\mu_0 \Phi(\mathbf{J}) = \mu_0 I$:

a)

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r A_\phi = \Phi(\mathbf{B}) \quad \longrightarrow \quad A_\phi(r) = \begin{cases} \frac{Br}{2} = \frac{\mu_0 n I r}{2} & r < R \\ \frac{B R^2}{2r} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2r} & R < r; \end{cases}$$

b)

$$A_z(z) = \frac{B \Sigma R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 N I R \Sigma}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Esercizio 3

Un circuito è costituito da una resistenza $R = 5.3 \text{ k}\Omega$ in serie ad un condensatore C formato da due armature piane circolari di raggio $R_c = 21 \text{ cm}$ separate da una distanza $d_c = 1.9 \text{ cm}$. Il circuito è alimentato in regime stazionario da un generatore di forza elettromotrice alternata $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ dove $\mathcal{E}_0 = 220 \text{ V}$ e $\omega = 314 \text{ rad/s}$. Si calcoli:

- l'ampiezza I e la fase ϕ_I della corrente \hat{I} che attraversa il circuito.

Attorno al condensatore, in asse con questo, è posto un solenoide toroidale di raggio medio $R_m = 22 \text{ cm}$ con $N_s = 1400$ spire circolari di sezione $\Sigma_s = 1.1 \text{ cm}^2$ e resistenza complessiva $R_s = 63 \text{ m}\Omega$. Trascurando la mutua induttanza dei due circuiti si calcoli

- la corrente di spostamento \hat{I}_D nel condensatore e l'autoinduttanza L_s del solenoide;
- l'ampiezza B e la fase ϕ_B del campo magnetico \hat{B} nel solenoide.

Svolgimento:

a)

$$\hat{I} = \frac{\mathcal{E}_0}{R + \frac{1}{i\omega C}} \quad \longrightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = 4.46 \text{ }\mu\text{A}, \quad \phi_I = \arctan \frac{1}{\omega RC} \simeq 90^\circ,$$

dove $C = \epsilon_0 \pi R_c^2 / d_c = 64.5 \text{ pF}$;

b)

$$\hat{I}_D = \hat{I}, \quad L_s = \frac{\mu_0 N_s^2 \Sigma_s}{2\pi R_m} = 196 \text{ }\mu\text{H},$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$;

- per la quarta equazione di Maxwell, su un percorso che attraversa il centro del solenoide

$$\oint \hat{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi R_m \hat{B} = \mu_0 (\hat{I}_D + N \hat{I}_s),$$

dove \hat{I}_s è la corrente nel solenoide dovuta all'effetto Faraday:

$$\hat{I}_s = -\frac{N}{R_s} \frac{d\Phi(\hat{\mathbf{B}})}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{i\omega L_s}{R_s} \hat{B} + \hat{B} = \frac{\mu_0 \hat{I}}{2\pi R_m}.$$

Si ha quindi

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_m \sqrt{1 + \frac{\omega^2 L_s^2}{R_s^2}}} = 1.38 \text{ pT}, \quad \phi_B = -\arctan \frac{\omega L_s}{R_s} = -44.3^\circ,$$

dove la fase è riferita alla corrente nel condensatore.