Università degli Studi di Siena, Corso di Laurea in Fisica
Prova d'esame di Fisica 2 – 01/02/2023

Nota: la valutazione della prova tiene conto della correttezza dei risultati analitici e numerici (attenzione ai segni, alle cifre significative ed alle unità di misura!) e della chiarezza dell'esposizione della soluzione. Spiegare sinteticamente la strategia di soluzione seguita, giustificare i principali passaggi e definire esplicitamente i simboli usati, anche con l'aiuto di figure (sistemi di riferimento, ecc.)

Esercizio 1

Un filo rettilineo di diametro $2a = 1.1$ mm porta una carica per unità di lunghezza $\lambda = 53$ nC/m. Si calcoli:

a) il potenziale $\varphi_1(\rho_1)$ in un piano ortogonale al filo a distanza $\rho_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = 3.1$ mm dal suo centro;

Si dispone parallelamente al filo un piano conduttore a potenziale nullo a distanza $\Delta y = -3.5\, a$ dal suo centro. Si calcoli:

b) l'espressione del potenziale $\varphi_2(x, y)$ in un semipiano ortogonale al filo nel generico punto $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ per $\rho \gg \Delta y$;

c) la densità di carica σ sul piano conduttore alla coordinata $x = 3.1$ mm.

Svolgimento:

a) scegliendo arbitrariamente la superficie del filo come riferimento del potenziale

$$\varphi_1(\rho_1) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{\rho_1} = -1.65 \text{ kV}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

b) scegliamo l'origine del sistema di riferimento a metà strada tra il filo e la sua immagine:

$$\varphi_2(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \frac{\Delta y}{|\boldsymbol{\rho} - \Delta y\, \hat{\mathbf{y}}|} - \ln \frac{\Delta y}{|\boldsymbol{\rho} + \Delta y\, \hat{\mathbf{y}}|} \right] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{|\boldsymbol{\rho} + \Delta y\, \hat{\mathbf{y}}|}{|\boldsymbol{\rho} - \Delta y\, \hat{\mathbf{y}}|} =$$

$$\approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} 2\Delta y \frac{\partial}{\partial y} \ln \rho = \frac{2\lambda\, \Delta y}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{\rho^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{\pi}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}}{\rho^2}$$

dove $\boldsymbol{\pi}_0 = -2\lambda\, \Delta y\, \hat{\mathbf{y}} = 204$ pC $\hat{\mathbf{y}}$ è il momento di dipolo per unità di lunghezza dovuto al filo e alla sua immagine;

c)

$$\sigma(x) = \epsilon_0 E_y(x, 0) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{\Delta y}{x^2 + (\Delta y)^2} = -2.44\ \mu\text{C/m}^2.$$

Esercizio 2

a) Si calcoli l'energia elettrostatica U_e di una carica q distribuita su una superficie sferica di raggio r_0;

b) supponendo che l'elettrone sia una tale superficie sferica carica e che la sua energia elettrostatica U_e sia pari all'energia $m_e c^2$ della particella a riposo, quale risulterebbe essere il raggio r_0 dell'elettrone?

c) a quale velocità angolare ω dovrebbe ruotare l'elettrone per generare il suo momento magnetico di spin $m_s = e\hbar/2m_e$ ($\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J·s)?

Svolgimento:

a)

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0};$$

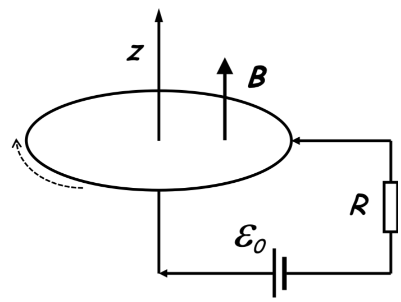
b)

$$r_0 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 1.40 \text{ fm},$$

dove $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C, $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg e $c = 3.00 \times 10^8$ m/s;

c) una superficie sferica di raggio r_0 carica con densità superficiale σ e rotante con velocità angolare ω genera un momento magnetico pari a

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\pi} \pi r_0^2 \sin^2\theta\, \sigma\, 2\pi r_0 \sin\theta\, r_0 d\theta = \frac{4\pi r_0^4 \omega\sigma}{3} \qquad \longrightarrow \qquad \omega = \frac{3\hbar}{2m_e r_0^2} = 8.77 \times 10^{25} \text{ rad/s}.$$



Esercizio 3

Un disco metallico di raggio $\rho_0 = 7.3$ cm è libero di ruotare attorno ad un asse ad esso ortogonale e passante per il suo centro (asse z) in presenza di un campo magnetico $B_z = 0.53$ T e di un momento di attrito resistente $M_{\text{res}} = 2.9$ N·mm indipendente dalla velocità angolare del disco. Tra l'asse metallico e il bordo del disco è collegato un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E}_0 = 9.3$ V. La resistenza complessiva del circuito è $R = 4.3\ \Omega$.

a) Trascurando l'autoinduzione, si calcoli la corrente I' che passa nel circuito quando la velocità angolare del disco è $\omega' = -87$ rad/s e se ne specifichi il verso;

b) la velocità angolare ω_0 del disco in condizioni stazionarie.

Svolgimento:

a) Quando il disco è in rotazione con $\omega_z < 0$, tra l'asse e il bordo del disco è presente una forza controelettromotrice

$$\mathcal{E}_{\text{Faraday}} = \int_0^{\rho_0} [(\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{B}] \cdot d\boldsymbol{\rho} = \frac{\omega' \rho_0^2 B_z}{2} = -0.123 \text{ V}$$

l'equazione del circuito è quindi

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\text{Faraday}} = I'R \qquad \longrightarrow \qquad I' = \frac{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\text{Faraday}}}{R} = 2.13 \text{ A}$$

e la corrente scorre dal centro verso il bordo;

b) se I_0 è la corrente che scorre a regime dal centro verso il bordo, il moto stazionario del disco è descritto da

$$\int_0^{\rho_0} \boldsymbol{\rho} \times [(I_0\, d\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{B})] = -\mathbf{M}_{\text{res}} \qquad \longrightarrow \qquad I_0 = \frac{2M_{\text{res}}}{\rho_0^2 B_z} = 2.05 \text{ A}.$$

Per il punto precedente deve valere anche

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\text{Faraday}}}{R} = \frac{1}{R}\left(\mathcal{E}_0 + \frac{\omega_0 \rho_0^2 B_z}{2}\right) \qquad \longrightarrow \qquad \omega_0 = \frac{2}{\rho_0^2 B_z}\left[\frac{2RM_{\text{res}}}{\rho_0^2 B_z} - \mathcal{E}_0\right] = -333 \text{ rad/s}.$$