

Esercizi di Elettromagnetismo

F. Della Valle

Dipartimento di Scienze Fisiche, della Terra e dell'Ambiente

e-mail: federico.dellavalle@unisi.it

novembre 2023

Indice

1	Esercizi di elettrostatica nel vuoto	2
2	Esercizi di elettrostatica in presenza di conduttori	9
3	Esercizi di elettrostatica nei mezzi materiali	14
4	Esercizi sulla corrente elettrica	25
5	Esercizi di magnetostatica nel vuoto	28
6	Esercizi di magnetismo nei materiali	37
7	Esercizi sui campi elettromagnetici variabili	45
8	Esercizi sui circuiti in corrente alternata	60

1 Esercizi di elettrostatica nel vuoto

1.1 Una sfera di raggio $R = 1.0$ cm è uniformemente carica con densità volumica di carica $\rho = 3.0$ nC/m³. All'interno della sfera vi è un volume sferico vuoto di raggio $R_0 = 3.0$ mm con centro a distanza $d = 6.0$ mm dal centro della prima sfera. Si calcoli:

- l'espressione del potenziale lontano dalla distribuzione di carica e il valore della carica totale Q e del vettore momento di dipolo \mathbf{p} ;
- il vettore campo elettrico \mathbf{E} in tutti i punti della sfera più piccola.

Svolgimento:

- In punti lontani dalla distribuzione di carica il potenziale può essere scritto come

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m,

$$Q = \int \rho dV = \frac{4}{3}\pi\rho(R^3 - R_0^3) = 1.22 \times 10^{-14} \text{ C}$$

e l'origine del sistema di riferimento è un punto arbitrariamente scelto nelle vicinanze della distribuzione di carica. Dato che la carica totale è non nulla, il valore del momento di dipolo

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}\rho(\mathbf{r}) dV$$

dipende dalla scelta dell'origine. Se questo punto è al centro della sfera grande si ha

$$\mathbf{p} = -\frac{4}{3}\pi\rho R_0^3 d \hat{\mathbf{d}} = -2.04 \times 10^{-18} \hat{\mathbf{d}} \text{ C} \cdot \text{m}.$$

dove $d \hat{\mathbf{d}}$ è il vettore dal centro della sfera grande a quello della sfera piccola;

- per applicare il teorema di Gauss in un punto interno alla sfera piccola consideriamo il sistema come la sovrapposizione di due distribuzioni di carica, la prima sferica di raggio R e densità di carica ρ e la seconda di raggio R_0 e densità $-\rho$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi r_1^2} \frac{4}{3}\pi\rho r_1^3 \hat{\mathbf{r}}_1 - \frac{1}{4\pi r_2^2} \frac{4}{3}\pi\rho r_2^3 \hat{\mathbf{r}}_2$$

ed essendo $\mathbf{r}_1 = d \hat{\mathbf{d}} + \mathbf{r}_2$,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho d}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{d}} = 678 \hat{\mathbf{d}} \text{ mV/m}.$$

1.2 Un protone p e un antiprotone \bar{p} si trovano nelle posizioni $\mathbf{r}_p = (1.0, -2.0, 3.0) \times 10^{-14}$ m e $\mathbf{r}_{\bar{p}} = (-5.0, 7.0, -11) \times 10^{-14}$ m. Schematizzando le due particelle come distribuzioni di carica uniformi di raggio $R_p = R_{\bar{p}} = 1.0$ fm si calcoli:

- il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}_p)$ alla posizione del protone;
- l'energia elettrostatica d'interazione $U_{e,\text{int}}$ delle due particelle;
- l'energia elettrostatica totale $U_{e,\text{tot}}$ del sistema.

Svolgimento:

a)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_p) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{\bar{p}}}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{\bar{p}}|^3} = (-15.6, 23.4, -36.4) \text{ V/fm}, \quad E(\mathbf{r}_p) = 46.0 \text{ V/fm}$$

dove $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ e $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$;

b)

$$U_{e,\text{int}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{\bar{p}}|} = -1.30 \text{ fJ} = -8.13 \text{ keV};$$

c) l'energia elettrostatica $U_0(Q_0, R_0)$ di una distribuzione di carica uniforme di densità ρ , raggio R_0 e carica totale Q_0 è data da

$$U_0(Q_0, R_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{R_0} \frac{\rho^2 \frac{4}{3}\pi R^3 4\pi R^2}{R} dR = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{Q_0^2}{R_0}.$$

L'energia totale delle due particelle è quindi

$$U_{e,\text{tot}} = 2U_0(e, R_p) + U_{e,\text{int}} = 275 \text{ fJ} = 1.72 \text{ MeV}.$$

1.3 Una sfera di raggio $R_0 = 3.7 \text{ mm}$ ha una carica di superficie $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$, dove $\sigma_0 = -53 \text{ nC/m}^2$ e θ è l'angolo polare. Si calcoli:

- il momento di dipolo \mathbf{p} della sfera;
- il potenziale $\varphi(\mathbf{r}_1)$ nel punto $\mathbf{r}_1 = (19, -31, 53) \text{ cm}$;
- il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1)$ nello stesso punto.

Svolgimento:

a) La carica negativa q_- del sistema è distribuita tra $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$:

$$q_- = \int_0^{\pi/2} \sigma_0 \cos \theta 2\pi R_0 \sin \theta R_0 d\theta = \sigma_0 2\pi R_0^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi/2} = \sigma_0 \pi R_0^2 = -q_+.$$

Il baricentro di q_- è

$$z_- = \frac{1}{q_-} \int z dq_- = \frac{1}{q_-} \int_0^{\pi/2} R_0 \cos \theta \sigma_0 \cos \theta 2\pi R_0 \sin \theta R_0 d\theta = 2R_0 \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3} R_0 = -z_+.$$

Si ha quindi

$$p_z = q_+ [z_+ - z_-] = \sigma_0 \frac{4}{3} \pi R_0^3 = -11.2 \text{ fC} \cdot \text{m};$$

b)

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} = -202 \text{ } \mu\text{V}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$;

c)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1 - \mathbf{p}r_1^2}{r_1^5} = (-279, 454, -396) \mu\text{V/m}, \quad E(\mathbf{r}_1) = 664 \mu\text{V/m}.$$

1.4 Si consideri il potenziale (detto di Yukawa)

$$\varphi(r) = \frac{g}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

e si calcoli:

- il corrispondente campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$;
- la carica $Q(r)$ totale contenuta in una sfera di raggio r , la carica puntiforme q situata nell'origine delle coordinate e la carica Q_{tot} contenuta in tutto lo spazio;
- la densità di carica $\varrho(r)$ alla distanza r dall'origine.

Svolgimento:

a)

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\frac{d\varphi}{dr} \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \frac{dr}{dx_i} = \frac{g}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e^{-\mu r}}{r^2} + \frac{\mu e^{-\mu r}}{r} \right) \sum \hat{\mathbf{x}}_i \frac{x_i}{r} = \frac{g e^{-\mu r}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\mu}{r} \right) \hat{\mathbf{r}};$$

b) applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica di raggio r centrata nell'origine,

$$Q(r) = \epsilon_0 \Phi(\mathbf{E}) = g e^{-\mu r} (1 + \mu r), \quad q = \lim_{r \rightarrow 0} Q(r) = g \quad Q_{\text{tot}} = \lim_{r \rightarrow \infty} Q(r) = 0;$$

c)

$$\varrho(r) = \frac{dQ}{dV} = \frac{dQ}{dr} \frac{dr}{dV} = -g\mu^2 r e^{-\mu r} \frac{1}{4\pi r^2} = -\frac{g\mu^2 e^{-\mu r}}{4\pi r}.$$

1.5 Si consideri il campo elettrico

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{A}{L^2 + z^2} \hat{\mathbf{z}}$$

dove $A = 1.3 \text{ V} \cdot \text{mm}$ e $L = 0.29 \text{ mm}$.

- Si calcoli la densità di carica $\varrho(\vec{\mathbf{r}})$ e se ne specifichi il valore nel punto $\vec{\mathbf{r}}_P = (L, 2L, 3L)$;
- un elettrone di carica $-e$ e massa m lasciato libero, da fermo, nella posizione $\vec{\mathbf{r}}_P$, a quale moto sarà soggetto? Si specifichino le costanti del moto (esempi: per un moto periodico, ampiezza e periodo; per un moto non limitato, la velocità finale; per un moto smorzato, la costante di tempo; etc.).

Svolgimento:

a)

$$\varrho(\vec{\mathbf{r}}) = \varrho(z) = \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\epsilon_0 \frac{2Az}{(L^2 + z^2)^2}, \quad \varrho(\vec{\mathbf{r}}_P) = \varrho(3L) = -\frac{3\epsilon_0 A}{50L^3} = -28.3 \mu\text{C/m}^3$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$;

b) moto accelerato con accelerazione monotona nel verso negativo dell'asse z :

$$a_z(z) = -\frac{eE_z(z)}{m}$$

dove $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C e $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg. Per il teorema delle forze vive

$$v(-\infty) = \sqrt{2 \int_{z_P}^{-\infty} a_z dz} = \sqrt{-\frac{2eA}{Lm} \int_3^{-\infty} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi} = \sqrt{\frac{2eA}{Lm} \left[\frac{\pi}{2} + \arctan(3) \right]} = 2.11 \times 10^6 \text{ m/s.}$$

1.6 Una corona circolare di raggio interno $a = 2.3$ cm e raggio esterno $b = 4.7$ cm è carica con densità di carica superficiale $1.7 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Sull'asse della corona, all'altezza $z_0 = 9.7$ cm si trova un dipolo $p = 1.3 \times 10^{-13}$ C·m inclinato di un angolo $\alpha_0 = 37^\circ$ rispetto all'asse z . Si calcoli:

- il campo elettrico $\mathbf{E}(z_0)$ alla posizione del dipolo;
- il potenziale $\varphi_0(z_0)$ supponendo $\varphi_0(\infty) = 0$; si calcoli poi il potenziale $\varphi_1(z_0)$ per il quale $\varphi_1(0) = 0$;
- si scriva l'espressione della forza \mathbf{F} che agisce sul dipolo e (*facoltativamente*) se ne calcoli il valore.

Svolgimento:

a)

$$E_z(z_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{z_0}{\sqrt{r^2 + z_0^2}} \frac{2\pi r \sigma dr}{r^2 + z_0^2} = \frac{\sigma z_0}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + z_0^2}} \right] = 7.02 \text{ kV/m}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

b)

$$\varphi_0(z_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{2\pi r \sigma dr}{\sqrt{r^2 + z_0^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{b^2 + z_0^2} - \sqrt{a^2 + z_0^2} \right] = 778 \text{ V};$$

$$\varphi_1(z_0) = \varphi_0(z_0) - \varphi_0(0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{b^2 + z_0^2} - \sqrt{a^2 + z_0^2} + a - b \right] = -1.53 \text{ kV};$$

c) usiamo un sistema di riferimento in cui $\mathbf{p} = (p_x, 0, p_z) = p (\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{E} = p \left(\sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{E}$$

Evidentemente

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{a^2}{(a^2 + z_0^2)^{3/2}} - \frac{b^2}{(b^2 + z_0^2)^{3/2}} \right] \quad \longrightarrow \quad F_z = -1.51 \times 10^{-10} \text{ N.}$$

Per trovare la componente trasversa della forza scriviamo il teorema di Gauss per i punti dell'asse z in coordinate cilindriche:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{E_r}{r} = -\frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Questa equazione differenziale ha soluzione

$$E_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{r\sigma}{4\epsilon_0} \left[\frac{b^2}{(b^2 + z_0^2)^{3/2}} - \frac{a^2}{(a^2 + z_0^2)^{3/2}} \right].$$

Sull'asse si ha quindi

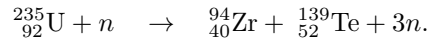
$$\frac{\partial E_r}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left[\frac{b^2}{(b^2 + z_0^2)^{3/2}} - \frac{a^2}{(a^2 + z_0^2)^{3/2}} \right] \quad \text{e} \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} = 0.$$

In definitiva

$$F_x = p \sin \alpha \frac{\partial E_r}{\partial r} = 5.71 \times 10^{-11} \text{ N} \quad \text{e} \quad F = 1.62 \times 10^{-10} \text{ N}.$$

1.7 È noto dalla Fisica Nucleare che la materia nucleare, essendo con ottima approssimazione incompressibile, ha densità di massa costante: il raggio di un nucleo atomico può essere scritto come $R = R_0 A^{1/3}$, con $R_0 = 1.5 \times 10^{-15}$ m. Per un nucleo ${}^{235}_{92}\text{U}$ si calcoli:

- la densità di carica ρ_U ;
- l'energia elettrostatica U_U ;
- l'energia elettrostatica U' liberata nella reazione



Svolgimento:

a)

$$\rho_U = \frac{92e}{\frac{4}{3}\pi 235R_0^3} = 4.43 \times 10^{24} \text{ C/m}^3$$

dove $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C;

b) uno dei modi di calcolare l'energia elettrostatica di una sfera uniformemente carica è scrivere

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3 \rho 4\pi r^2 dr}{r} = \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 R^5$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m. Si ha quindi

$$U_U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{(92e)^2}{\sqrt[3]{235}R_0} = 126 \text{ pJ} = 789 \text{ MeV};$$

c)

$$U' = U_U - U_{\text{Zr}} - U_{\text{Te}} = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R_0} \left[\frac{92^2}{\sqrt[3]{235}} - \frac{40^2}{\sqrt[3]{94}} - \frac{52^2}{\sqrt[3]{139}} \right] = 45.8 \text{ pJ} = 286 \text{ MeV}.$$

1.8 Attorno a quattro cariche positive elementari $+e$ raggruppate in uno stesso punto sono distribuite simmetricamente nel piano xy quattro cariche negative $-e$ a distanza $a = 0.53$ Å da queste. Si determini:

- a) quale sia il primo ordine di multipolo non nullo della distribuzione di cariche; si giustifichi la risposta calcolando il potenziale elettrico generato dalla distribuzione nel punto $(0, 0, z)$, con $z \gg a$;
- b) l'energia elettrostatica U_{es} del sistema;
- c) il lavoro \mathcal{L} necessario per rimuovere la carica centrale dal sistema.

Svolgimento:

- a) quadrupolo. Infatti:

$$\varphi(0, 0, z) = \frac{4e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ea^2}{z^3}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

- b)

$$U_{es} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \left\{ 4 \left[\frac{2}{\sqrt{2}a} + \frac{1}{2a} - \frac{4}{a} \right] - 4 \frac{4}{a} \right\} = \frac{e^2 (2\sqrt{2} - 15)}{4\pi\epsilon_0 a} = -5.29 \times 10^{-17} \text{ J} = -330 \text{ eV}$$

dove $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C;

- c)

$$\mathcal{L} = U'_{es} - U_{es} = \frac{16e^2}{4\pi\epsilon_0 a} = -4e\varphi(0, 0, 0) = 6.95 \times 10^{-17} \text{ J} = 434 \text{ eV}.$$

1.9 Due strati piani indefiniti adiacenti hanno spessori e densità di carica, rispettivamente, $w_1 = 1.1 \mu\text{m}$ e $\rho_1 = -0.65 \times 10^{14} \text{ e/cm}^3$ e $w_2 = 0.55 \mu\text{m}$ e $\rho_2 = 1.3 \times 10^{14} \text{ e/cm}^3$. (Questo sistema potrebbe essere un modello di giunzione tra semiconduttori di tipo p e n). Si calcoli:

- a) il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in tutto lo spazio e in particolare in un punto tra i due strati di carica;
- b) la differenza di potenziale $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ tra le facce esterne dei due strati;
- c) la pressione P esercitata da uno strato sull'altro.

Svolgimento:

- a) consideriamo una coordinata z ortogonale agli strati e avente origine sul piano esterno del primo strato. Consideriamo scatole gaussiane cilindriche con asse ortogonale agli strati di carica e una base a $z < 0$. Dal momento che il sistema è complessivamente neutro, ponendo la seconda base a $z > w_1 + w_2$ si vede facilmente che il campo elettrico al di fuori degli strati di carica è nullo. Invece, se la seconda base è interna agli strati di carica si ha

$$E_z(z) = \begin{cases} \frac{\rho_1 z}{\epsilon_0} & 0 \leq z \leq w_1 \\ \frac{\rho_1 w_1 + \rho_2(z - w_1)}{\epsilon_0} & w_1 \leq z \leq w_1 + w_2 \end{cases}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m. Il grafico del campo elettrico in funzione di z è un triangolo con due vertici sull'asse z e un terzo vertice all'intersezione dei due strati con $E_z(w_1) = \rho_1 w_1 / \epsilon_0 = -1.37 \text{ MV/m}$;

b)

$$\Delta\varphi = \int_0^{w_1+w_2} E_z dz = \frac{\rho_1 w_1 (w_1 + w_2)}{2\epsilon_0} = -1.07 \text{ V};$$

c)

$$P = \left| \frac{\rho_1 w_1 \rho_2 w_2}{2\epsilon_0} \right| = 8.27 \text{ N/m}^2.$$

2 Esercizi di elettrostatica in presenza di conduttori

2.1 Il campo elettrico terrestre alla quota h è radiale diretto verso il suolo: $E_0 = -130$ V/m a $h_0 = 0$, $E_1 = -40$ V/m a $h_1 = 1$ km. Schematizzando la terra come una sfera conduttrice di raggio R_T circondata da un guscio sferico di spessore h_1 con densità costante di carica di volume, si calcoli:

- la densità di carica superficiale σ presente sulla superficie della terra;
- la carica totale Q presente in atmosfera tra le quote h_0 e h_1 ;
- la differenza di potenziale ΔV tra le quote h_0 e h_1 .

Svolgimento:

a)

$$\sigma = \epsilon_0 E_0 = -1.15 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2;$$

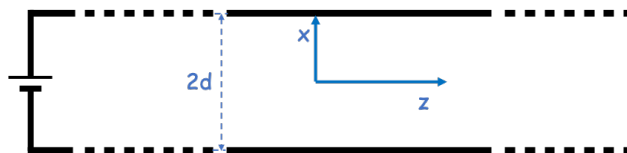
b) con $R_T = 6.38 \times 10^3$ km

$$Q = -\frac{E_0 - E_1}{E_0} \sigma 4\pi R_T^2 = \epsilon_0 (E_1 - E_0) 4\pi R_T^2 = 4.07 \times 10^5 \text{ C};$$

c) essendo il campo elettrico E lineare con la quota h

$$\Delta V = \int_{h_0}^{h_1} E(h) dh = \int_{h_0}^{h_1} \left(E_0 + \frac{E_1 - E_0}{h_1 - h_0} h \right) dh = \frac{E_0 + E_1}{2} h_1 = -85 \text{ kV}.$$

2.2 Due fili conduttori rettilinei indefiniti di diametro $2a = 1.1$ mm corrono paralleli ad una



distanza (centro-centro) $2d = 3.1$ cm e sono mantenuti ad una differenza di potenziale $\Delta V = 230$ V. Si determini:

- l'espressione del campo elettrico \mathbf{E} nel piano dei fili;
- le cariche per unità di lunghezza λ_- e λ_+ presenti sui fili;
- la capacità per unità di lunghezza γ del sistema;
- le forze elettriche per unità di lunghezza \mathbf{f}_- e \mathbf{f}_+ che i due fili si scambiano.

Svolgimento:

- a) Nel piano dei fili il campo \mathbf{E} ha la sola componente ortogonale ai fili stessi. Poniamo l'origine del sistema di riferimento a mezza strada tra i due fili, con il filo negativo a $x = -d$ e il positivo a $x = d$. Trascurando le deviazioni dalla simmetria cilindrica delle due distribuzioni di carica, ed essendo $\lambda_- = -\lambda_+$

$$E_x(x) = E_{x,-} + E_{x,+} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{\lambda_-}{x+d} + \frac{\lambda_+}{x-d} \right] = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_+ d}{(x^2 - d^2)} & \text{fuori dei fili,} \\ 0 & \text{all'interno dei fili;} \end{cases}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

- b)

$$\Delta V = - \int_{-d+a}^{d-a} E_x(x) dx = \frac{\lambda_+}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{2d-a}{a} \quad \longrightarrow \quad \lambda_+ = \frac{\pi\epsilon_0 \Delta V}{\ln \frac{2d-a}{a}} = 1.59 \text{ nC/m;}$$

- c)

$$\gamma = \frac{\lambda_+}{\Delta V} = 6.98 \text{ pF/m;}$$

- d)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_- &= \lambda_- \mathbf{E}_+(-d, 0, z) = -\mathbf{f}_+ = -\lambda_+ \mathbf{E}_-(d, 0, z) = \frac{\lambda_+^2}{4\pi\epsilon_0 d} \hat{\mathbf{x}} = \\ &= \frac{\pi\epsilon_0 \Delta V^2}{4d \left[\ln \frac{2d-a}{a} \right]^2} = 736 \hat{\mathbf{x}} \text{ nN/m.} \end{aligned}$$

2.3 Si abbia un condensatore sferico con elettrodo interno negativo di raggio $R_1 = 3.1$ cm ed elettrodo esterno positivo di raggi $R_2 = 5.8$ cm e $R_3 = 6.1$ cm riempito con un dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 7.1$. Si calcoli

- a) la capacit  C_c del condensatore.

A grande distanza dal condensatore, isolato da questo, si trova una sfera metallica di raggio $R_s = 3.3$ cm su cui   stata depositata una carica $Q_s = +2.3$ nC. Sapendo che l'energia elettrostatica complessiva del sistema   $U = 3.7$ μ J si calcoli

- b) il valore $V_2 = V_3$ del potenziale dell'elettrodo esterno del condensatore e la differenza di potenziale $\Delta V_c = V_2 - V_1$.

Collegando elettricamente la sfera metallica all'elettrodo interno del condensatore si calcolino

- c) i nuovi valori della carica Q'_1 presente sull'elettrodo interno del condensatore, del potenziale $V'_2 = V'_3$ e della differenza di potenziale $\Delta V'_c = V'_2 - V'_1$.

Svolgimento:

- a)

$$C_c = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 52.6 \text{ pF,}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

b) essendo nulla la carica complessiva $Q_1 + Q_2$ del condensatore, $V_2 = V_3 = 0$;

$$U = \frac{C_c(\Delta V_c)^2}{2} + \frac{Q_s^2}{2C_s} \quad \rightarrow \quad \Delta V_c = \sqrt{\frac{2}{C_c} \left(U - \frac{Q_s^2}{2C_s} \right)} = 337 \text{ V},$$

dove $C_s = 4\pi\epsilon_0 R_s = 3.67 \text{ pF}$;

c) la carica complessiva $Q_s + Q_1$ disponibile per la sfera e l'elettrodo interno del condensatore si ripartisce tra i due:

$$Q_s + Q_1 = Q_s - C_c \Delta V_c = Q'_s + Q'_1 \quad \rightarrow \quad Q'_1 = Q_1 + Q_s - Q'_s > Q_1$$

Sull'elettrodo esterno, oltre alla carica $Q'_2 = -Q'_1$ rimane quindi una carica $Q'_3 = Q_2 + Q'_1 = C_c \Delta V_c + Q'_1 = Q_s - Q'_s > 0$, che porta il potenziale del condensatore al valore $V'_3 = Q'_3 / (4\pi\epsilon_0 R_3)$, e quindi:

$$V'_3 = V'_1 + \Delta V'_c = V'_s + \Delta V'_c \quad \rightarrow \quad \frac{C_c \Delta V_c + Q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_3} = \frac{Q_s - C_c \Delta V_c - Q'_1}{C_s} - \frac{Q'_1}{C_c}$$

da cui

$$Q'_1 = \left[\frac{Q_s}{C_s} - C_c \Delta V_c \left(\frac{1}{C_s} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_3} \right) \right] \left(\frac{1}{C_c} + \frac{1}{C_s} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_3} \right)^{-1} = -15.5 \text{ nC},$$

$$V'_1 = V'_s = \frac{Q_s - C_c \Delta V_c - Q'_1}{C_s} = 28.6 \text{ V}, \quad \Delta V'_c = -\frac{Q'_1}{C_c} = 295 \text{ V},$$

$$V'_3 = \frac{C_c \Delta V_c + Q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 324 \text{ V}.$$

2.4 Un dipolo puntiforme $p_z = 0.53 \text{ fC}\cdot\text{m}$ si trova a distanza $z_0 = 13 \text{ }\mu\text{m}$ dal piano conduttore xy mantenuto a potenziale nullo. Si calcoli:

- la forza \mathbf{F} ed il momento torcente \mathbf{M} che agiscono sul dipolo;
- la carica di superficie totale σ_0 presente sul piano conduttore;
- l'espressione del potenziale $\varphi(\mathbf{r})$ nel semispazio $z > 0$ per $r \gg z_0$.

Svolgimento:

- L'immagine del dipolo è un dipolo $p'_z = p_z$ posto in $z'_0 = -z_0$. La forza su p_z è dovuta al campo elettrico $\mathbf{E}'(0, 0, z_0) = E'_z(0, 0, z_0) \hat{\mathbf{z}}$ generato dall'immagine:

$$F_z = p_z \frac{\partial E'_z}{\partial z} = \frac{2p_z^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{(z + z_0)^3} \Big|_{z=z_0} = -\frac{3p_z^2}{32\pi\epsilon_0 z_0^4} = -33.2 \text{ mN}, \quad \mathbf{M} = 0$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$;

b)

$$\sigma_0 = 0;$$

c)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|^3} = \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} + \frac{(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|^3} \right] \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

2.5 Un filo rettilineo di diametro $2a = 1.1$ mm porta una carica per unità di lunghezza $\lambda = 53$ nC/m. Si calcoli:

- a) il potenziale $\varphi_1(\rho_1)$ in un piano ortogonale al filo a distanza $\rho_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = 3.1$ mm dal suo centro;

Si dispone parallelamente al filo un piano conduttore (piano xz) a potenziale nullo a distanza $\Delta y = 3.5 a$ dal suo centro. Si calcoli:

- b) l'espressione del potenziale $\varphi_2(x, y)$ in un semipiano ortogonale al filo nel generico punto $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ per $\rho \gg \Delta y$;
c) la densità di carica σ sul piano conduttore alla coordinata $x = 3.1$ mm.

Svolgimento:

- a) scegliendo arbitrariamente la superficie del filo come riferimento del potenziale

$$\varphi_1(\rho_1) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{\rho_1} = -1.65 \text{ kV}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

- b) scegliamo l'origine del sistema di riferimento sul piano conduttore a metà strada tra il filo e la sua immagine:

$$\begin{aligned} \varphi_2(\boldsymbol{\rho}) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \frac{\Delta y}{|\boldsymbol{\rho} - \Delta y \hat{\mathbf{y}}|} - \ln \frac{\Delta y}{|\boldsymbol{\rho} + \Delta y \hat{\mathbf{y}}|} \right] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{|\boldsymbol{\rho} + \Delta y \hat{\mathbf{y}}|}{|\boldsymbol{\rho} - \Delta y \hat{\mathbf{y}}|} = \\ &\approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} 2\Delta y \frac{\partial}{\partial y} \ln \rho = \frac{2\lambda \Delta y}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{\rho^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\boldsymbol{\pi}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}}{\rho^2} \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{\pi}_0 = 2\lambda \Delta y \hat{\mathbf{y}} = 204$ pC $\hat{\mathbf{y}}$ è il momento di dipolo per unità di lunghezza dovuto al filo e alla sua immagine;

- c)

$$\sigma(x) = \epsilon_0 E_y(x, 0) = -\frac{\lambda}{\pi} \frac{\Delta y}{x^2 + (\Delta y)^2} = -2.44 \text{ } \mu\text{C/m}^2.$$

2.6 Due sferette conduttrici uguali di raggio $a = 7.2$ mm e massa $m = 0.21$ g sono sospese a due fili isolanti privi di massa di lunghezza $L = 53$ cm fissati ad un medesimo punto. Mentre sono a contatto ricevono una carica complessiva q e trovano poi una nuova posizione di equilibrio a distanza $d = 11$ cm tra loro. Si calcoli:

- a) il valore della carica q ;
b) il campo elettrico $E_1(a)$ e il potenziale $\phi_1(a)$ alla superficie della prima sfera;
c) l'energia elettrostatica di interazione U_{int} delle due sfere e l'energia elettrostatica totale U_{tot} del sistema.

Svolgimento:

- a) sulle sferette agiscono la forza peso verticale \mathbf{P} , la forza coulombiana orizzontale \mathbf{F}_C e la tensione dei fili \mathbf{T} , con $\mathbf{P} + \mathbf{F}_C + \mathbf{T} = 0$, dove

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}, \quad \mathbf{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d^3} \mathbf{d}, \quad T = \sqrt{P^2 + F_C^2}$$

dove $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ e $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$. Indicando con α l'angolo tra i due fili

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2\sqrt{L^2 - d^2/4}} = \frac{F_C}{P} \quad \longrightarrow \quad q = \sqrt{\frac{16\pi\epsilon_0 d^3 m g}{\sqrt{4L^2 - d^2}}} = 34.0 \text{ nC};$$

- b)

$$E_1(a) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2a^2} = 2.95 \text{ MV/m}, \quad \phi_1(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{2a} + \frac{q}{2d} \right] = 22.6 \text{ kV}$$

dove $\sigma_1 = \sigma_2$ sono le densità di carica delle due sfere, supposte uniformi, trascurando cioè il campo elettrico generato da una sfera alla posizione dell'altra. Si ha quindi $E_1(a) = E_2(a)$ e $\phi_1(a) = \phi_2(a)$;

- c)

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d} = 23.6 \text{ } \mu\text{J}, \quad U_{\text{tot}} = 2 \times \frac{1}{2} q_1 \phi_1(a) = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{d} \right] = 385 \text{ } \mu\text{J}.$$

3 Esercizi di elettrostatica nei mezzi materiali

3.1 Una sfera di raggio $R_1 = 10$ cm ha una carica di volume uniforme ρ ed è circondata da un guscio dielettrico di spessore $R_2 - R_1 = 10$ cm. Sapendo che il potenziale elettrico sulla superficie esterna del dielettrico è $V_2 = 50$ V e che quello al centro della sfera è $V_0 = 125$ V, si calcoli :

- la densità volumetrica di carica ρ ;
- la costante dielettrica relativa ϵ_r del materiale dielettrico;
- il vettore densità di polarizzazione \mathbf{P} in un punto al centro dello strato di dielettrico.

Svolgimento:

a)

$$V_2 = \int_{R_2}^{\infty} E(r) dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{\infty} \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R_1^3}{r^2} dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{R_2} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \rho = \frac{3\epsilon_0 R_2 V_2}{R_1^3} = 2.66 \times 10^{-7} \text{ C/m}^3;$$

b)

$$V_2 - V_0 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{R_1} \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} dr - \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R_1^3}{r^2} dr = -\frac{\rho R_1^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

da cui

$$\epsilon_r = \frac{1 - \frac{R_1}{R_2}}{\frac{R_1}{R_2} \left(\frac{V_0}{V_2} - 1 \right) - \frac{1}{2}} = 2;$$

c)

$$P_r(r) = D_r(r) - \epsilon_0 E_r(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R_1^3}{r^2} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) = \frac{\rho R_1^3}{6r^2} = \frac{\epsilon_0 R_2 V_2}{2r^2}$$

da cui

$$P_r \left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right) = \frac{2\epsilon_0 R_2 V_2}{(R_1 + R_2)^2} = 1.97 \text{ nC/m}^2.$$

3.2 Una carica $q = 1.1$ pC e un dipolo permanente $p = 1.3 \times 10^{-19}$ C·m, entrambi puntiformi, sono a distanza $z = 1.9$ cm. Il vettore \mathbf{p} forma un angolo $\alpha = 45^\circ$ con il vettore posizione \mathbf{r} del dipolo rispetto alla carica. Si calcoli:

- il momento della forza M che agisce su \mathbf{p} ;
- la forza \mathbf{F} che agisce su \mathbf{p} ;
- il momento della forza M' e la forza \mathbf{F}' nel caso in cui un dipolo della stessa intensità p , anziché essere permanente, sia invece generato dalla polarizzazione di un cilindretto neutro di volume $\tau = 0.71$ mm³ di un materiale lineare omogeneo e isotropo posto alla stessa distanza z dalla stessa carica q con l'asse allineato al vettore posizione \mathbf{r} . Si calcoli anche la costante dielettrica relativa ϵ_r del materiale. Si trascurino le variazioni del campo elettrico all'interno del cilindretto.

Svolgimento:

a) Detto \mathbf{E}_0 il campo elettrico della carica puntiforme

$$M = |\mathbf{p} \times \mathbf{E}_0| = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0 z^2} \sin \alpha = 2.52 \times 10^{-18} \text{ N} \cdot \text{m}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$;

b) in un sistema di riferimento in cui $\mathbf{p} = (p_x, 0, p_z) = p\sqrt{2}(1, 0, 1)/2$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{E}_0 = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{E}_0$$

Evidentemente $\partial\mathbf{E}_0/\partial z = -2\mathbf{E}_0/z$, mentre $\partial\mathbf{E}_0/\partial x = E_0 d\theta/(z d\theta) \hat{\mathbf{x}}$. Si ha quindi

$$\mathbf{F} = \frac{\sqrt{2}pq}{8\pi\epsilon_0 z^3} (\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{z}}) = (1.33 \hat{\mathbf{x}} - 2.65 \hat{\mathbf{z}}) \times 10^{-16} \text{ N} \quad F = 2.96 \times 10^{-16} \text{ N};$$

c)

$$\mathbf{M}' = 0;$$

Il valore di ϵ_r si ottiene da

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}\tau = \tau\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \mathbf{E}_0 \quad \longrightarrow \quad \epsilon_r = \frac{1}{1 - \frac{p}{\tau\epsilon_0 E_0}} = 4.08;$$

$$\mathbf{F}' = -\frac{\tau}{2} \vec{\nabla} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \epsilon_0 E_0^2) = -\frac{\tau}{2} \epsilon_0 \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \vec{\nabla} E_0^2 = \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \frac{q^2 \tau}{8\pi^2 \epsilon_0 z^5} \hat{\mathbf{r}} = p \frac{\partial E_0}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} = -3.75 \times 10^{-16} \hat{\mathbf{r}} \text{ N}.$$

3.3 Un condensatore sferico di raggi $a = 6.7 \text{ cm}$ e $b = 7.6 \text{ cm}$ è completamente riempito da due calotte semisferiche di due diversi dielettrici lineari, omogenei e isotropi con costanti dielettriche relative $\epsilon_{r1} = 2.4$ e $\epsilon_{r2} = 4.2$ ed è carico con una carica totale $Q = 0.13 \mu\text{C}$. Si calcoli:

- il campo elettrico \mathbf{E} nello spazio interno al condensatore;
- il valore C della sua capacità;
- l'energia totale U_e .

Svolgimento:

a) Il campo elettrico è radiale e per la sua continuità sulla superficie di separazione dei due dielettrici deve valere, in termini dello spostamento elettrico \mathbf{D} nei due emisferi,

$$E(r) = \frac{D_1(r)}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{D_2(r)}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}.$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$. In termini delle densità di carica libera sull'elettrodo interno questa relazione si scrive come

$$\frac{\sigma_1}{\epsilon_{r1}} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_{r2}},$$

e usando la regola di somma

$$Q_1 + Q_2 = 2\pi a^2 (\sigma_1 + \sigma_2) = Q$$

si ottiene

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \frac{Q}{r^2};$$

b)

$$C = C_1 + C_2 = 2\pi\epsilon_0(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})\frac{ab}{b-a} = 208 \text{ pF};$$

c)

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2(b-a)}{4\pi\epsilon_0(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})ab} = 40.6 \text{ } \mu\text{J}.$$

3.4 Un condensatore a facce piane e parallele di forma quadrata di lato $d = 9.0$ cm e distanti tra loro $h = 1.0$ cm è caricato alla tensione $V_0 = 120$ V e poi staccato dal generatore. Tra le facce si inserisce, per una profondità $x = 3.0$ cm, una lastra neutra di dielettrico con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4.8$ e spessore $b = 0.80$ cm. Si calcoli:

- le capacità C_0 e C_x del dispositivo prima e dopo l'inserimento della lastra;
- la differenza di potenziale V_x tra le armature;
- la forza F che agisce sulla lastra di dielettrico.

Svolgimento:

a)

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 d^2}{h} = 7.17 \text{ pF},$$
$$C_x = \left[\frac{b}{\epsilon_0 \epsilon_r x d} + \frac{h-b}{\epsilon_0 x d} \right]^{-1} + \frac{\epsilon_0 (d-x)d}{h} = \frac{\epsilon_0 d}{h} \frac{\epsilon_r h d - \chi b (d-x)}{b + \epsilon_r (h-b)} = 11.3 \text{ pF}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m e $\chi = \epsilon_r - 1$;

b)

$$V_x = C_0 V_0 / C_x = 76.2 \text{ V};$$

c)

$$F = - \left. \frac{dU}{dx} \right|_{q=\text{cost}} = - \frac{C_0^2 V_0^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{C_x} \right) = \frac{C_0^2 V_0^2}{2} \frac{h}{\epsilon_0 d} \frac{\chi b [b + \epsilon_r (h-b)]}{[\epsilon_r h d - \chi b (d-x)]^2} = 1.99 \times 10^{-7} \text{ N}.$$

3.5 Un condensatore piano con dielettrico di capacità $C = 54$ pF è costituito da due armature circolari di raggio $\rho_0 = 1.2$ cm separate da una distanza $\Delta z_0 = \rho_0/2$. Tra le armature c'è una differenza di potenziale $\Delta\varphi = 1.5$ V. Approssimando ove opportuno la polarizzazione del dielettrico con una polarizzazione uniforme, e assumendo che l'asse z abbia origine nel centro del cilindretto si calcoli:

- la suscettività χ del dielettrico;
- il campo elettrico \mathbf{E} nel punto $\mathbf{r}_0 = (0, 5\rho_0, 0)$;
- il potenziale φ nel punto $\mathbf{r}_1 = (0, 0, 10\Delta z_0)$.

Svolgimento:

a)

$$\chi = \frac{C \Delta z_0}{\epsilon_0 \pi \rho_0^2} - 1 = 79.9$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

b) il momento di dipolo del condensatore è

$$p_z = \epsilon_0 E \pi \rho_0^2 \Delta z_0 = \pi \rho_0^2 \epsilon_0 \Delta \phi$$

e quindi

$$E_z(\mathbf{r}_0) \approx -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_z}{r_0^3} = -\frac{\Delta\phi}{4 \cdot 5^3 \rho_0} = -250 \text{ mV/m};$$

c)

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_z}{r_1^2} = \frac{\Delta\phi}{100} = 15 \text{ mV}.$$

3.6 Una lastra di spessore $d = 13$ cm di un materiale dielettrico lineare, omogeneo e isotropo di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2.3$ è carica con densità di carica di volume uniforme $\varrho_{\text{lib}} = 0.53 \mu\text{C}/\text{m}^3$. Si determini:

- il campo elettrico $\mathbf{E}(0, 0, z)$ lungo un asse z ortogonale alla lastra e avente origine nel centro della stessa; si specifichi in particolare il campo elettrico nelle vicinanze di $z = d/2$;
- il potenziale $\varphi(0, 0, z)$ lungo lo stesso asse; si specifichi in particolare il potenziale nelle vicinanze di $z = d/2$
- la densità di carica di polarizzazione $\varrho_{\text{pol}}(0, 0, z)$ lungo lo stesso asse e le densità di carica di superficie σ_{pol} nel dielettrico.

Svolgimento:

- a) Nella geometria data, il campo elettrico ha la sola componente z che dipende solo da z . Applichiamo il teorema di Gauss allo spostamento elettrico \mathbf{D} per una superficie chiusa cilindrica Σ allineata con l'asse z e simmetrica rispetto al piano $z = 0$. Per la simmetria del problema $D_z(0, 0, -z) = -D_z(0, 0, z)$ e quindi

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{D}) = 2D_z(0, 0, z)A = \begin{cases} \varrho_{\text{lib}} 2Az & (|z| \leq d/2) \\ \varrho_{\text{lib}} 2Ad & (|z| \geq d/2). \end{cases}$$

dove A è l'area di base della superficie. Si ha

$$D_z(0, 0, z) = \varrho_{\text{lib}} z, \quad E_z(0, 0, z) = \frac{\varrho_{\text{lib}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} z, \quad \left(|z| < \frac{d}{2} \right)$$

$$D_z(0, 0, z) = \text{sgn}(z) \varrho_{\text{lib}} d, \quad E_z(0, 0, z) = \text{sgn}(z) \frac{\varrho_{\text{lib}}}{\epsilon_0} d, \quad \left(|z| > \frac{d}{2} \right)$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m e $\text{sgn}(z) = z/|z|$; in particolare allora

$$E_z \left(0, 0, \frac{d}{2} \Big|_{-} \right) = \frac{\varrho_{\text{lib}} d}{\epsilon_0 \epsilon_r 2} = 1.69 \text{ kV/m}, \quad E_z \left(0, 0, \frac{d}{2} \Big|_{+} \right) = \frac{\varrho_{\text{lib}} d}{\epsilon_0 2} = 3.89 \text{ kV/m};$$

b) prendendo come riferimento il punto $(0, 0, 0)$

$$\varphi(0, 0, z) = - \int_0^z E_z(0, 0, z) dz = \begin{cases} -\frac{\varrho_{\text{lib}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{z^2}{2} & \left(|z| \leq \frac{d}{2}\right) \\ -\frac{\varrho_{\text{lib}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{d^2}{8} - \frac{\varrho_{\text{lib}}}{\epsilon_0} d \left[\text{sgn}(z)z - \frac{d}{2}\right] & \left(|z| \geq \frac{d}{2}\right). \end{cases}$$

In particolare allora

$$\varphi\left(0, 0, \frac{d}{2}\Big|_{-}\right) = \varphi\left(0, 0, \frac{d}{2}\Big|_{+}\right) = -\frac{\varrho_{\text{lib}}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{d^2}{8} = -55.0 \text{ V};$$

c)

$$\varrho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot (\mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\partial D_z}{\partial z} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \varrho_{\text{lib}} = -300 \text{ nC/m}^3,$$

$$\sigma_{\text{pol}} = \epsilon_0 \left[E_z\left(0, 0, \frac{d}{2}\Big|_{+}\right) - E_z\left(0, 0, \frac{d}{2}\Big|_{-}\right) \right] = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \varrho_{\text{lib}} \frac{d}{2} = -\varrho_{\text{pol}} \frac{d}{2} = 19.5 \text{ nC/m}^2.$$

3.7 Un condensatore piano è formato da due lastre metalliche parallele quadrate di lato $L = 5.3$ cm separate da una distanza $d_0 = 4.3$ mm poste ad una differenza di potenziale $V_0 = 50$ V. Tra le due lastre, isolate dal generatore, si inseriscono due lastre anch'esse quadrate di lato L , una metallica di spessore $d_1 = 1.1$ mm e una di dielettrico di spessore $d_2 = 1.3$ mm e costante dielettrica $\epsilon_r = 3.7$. Si determini:

- la capacità C_0 del sistema originale e la sua energia U_0 ;
- la capacità C del sistema modificato e la nuova differenza di potenziale V tra le armature;
- la variazione di energia elettrostatica ΔU , specificandone la provenienza o la destinazione.

Svolgimento:

a)

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d_0} = 5.78 \text{ pF}, \quad U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = 7.23 \text{ nJ};$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

b)

$$C = \frac{\frac{\epsilon_0 S}{d_0 - d_1 - d_2} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d_2}}{\frac{\epsilon_0 S}{d_0 - d_1 - d_2} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d_2}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d_2 + \epsilon_r (d_0 - d_1 - d_2)} = 11.0 \text{ pF},$$

$$V = \frac{C_0 V_0}{C} = \frac{d_2 + \epsilon_r (d_0 - d_1 - d_2)}{\epsilon_r d_0} V_0 = 26.2 \text{ V};$$

c)

$$\Delta U = \frac{1}{2}(C_0 V_0)^2 \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} \right) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d_0} V_0^2 \frac{d_2 - \epsilon_r (d_1 + d_2)}{\epsilon_r d_0} = -3.44 \text{ nJ},$$

dove l'energia persa corrisponde al lavoro fatto dal campo nell'inserimento delle lastre.

3.8 Una sfera di raggio $R = 1.3 \text{ cm}$ di un materiale dielettrico lineare, omogeneo e isotropo di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2.3$ è carica con densità di carica di volume uniforme $\varrho_{\text{lib}} = 0.53 \mu\text{C}/\text{m}^3$. Si determini:

- il campo elettrico $\mathbf{E}(r, 0, 0)$; si specifichi in particolare il campo elettrico nelle vicinanze di $r = R$;
- il potenziale $\varphi(r, 0, 0)$; si specifichi in particolare il potenziale nelle vicinanze di $r = 0$ e di $r = R$;
- l'energia elettrostatica U del sistema.

Svolgimento:

- Applichiamo il teorema di Gauss allo spostamento elettrico \mathbf{D} per una superficie sferica concentrica con la sfera:

$$\Phi(\mathbf{D}) = 4\pi r^2 D_r(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_{\text{lib}} & (r \leq R) \\ \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_{\text{lib}} & (r \geq R). \end{cases}$$

Si ha

$$D_r(r) = \frac{\varrho_{\text{lib}}}{3} r, \quad E_r(r) = \frac{\varrho_{\text{lib}}}{3\epsilon_0 \epsilon_r} r, \quad (r < R)$$

$$D_r(r) = \frac{\varrho_{\text{lib}} R^3}{3r^2}, \quad E_r(r) = \frac{\varrho_{\text{lib}} R^3}{3\epsilon_0 r^2}, \quad (r > R)$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$; in particolare allora

$$E_r(R_-) = \frac{\varrho_{\text{lib}} R}{3\epsilon_0 \epsilon_r} = 113 \text{ V/m}, \quad E_r(R_+) = \frac{\varrho_{\text{lib}} R}{3\epsilon_0} = 260 \text{ V/m};$$

- prendendo come riferimento l'infinito

$$\varphi(r) = \int_r^\infty E_r(r) dr = \begin{cases} \frac{\varrho_{\text{lib}} R^3}{3\epsilon_0 r} & (r \geq R) \\ \frac{\varrho_{\text{lib}} R^2}{3\epsilon_0} + \frac{\varrho_{\text{lib}}}{6\epsilon_0 \epsilon_r} (R^2 - r^2) & (r \leq R). \end{cases}$$

In particolare allora

$$\varphi(R_-) = \varphi(R_+) = \frac{\varrho_{\text{lib}} R^2}{3\epsilon_0} = 3.37 \text{ V}, \quad \varphi(0) = \frac{\varrho_{\text{lib}} R^2}{3\epsilon_0} \left(1 + \frac{1}{2\epsilon_r} \right) = 4.11 \text{ V};$$

c)

$$U = \int \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} dV = \frac{2\pi \varrho_{\text{lib}}^2}{9\epsilon_0 \epsilon_r} \int_0^R r^4 dr + \frac{2\pi R^6 \varrho_{\text{lib}}^2}{9\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{2\pi R^5 \varrho_{\text{lib}}^2}{45\epsilon_0 \epsilon_r} + \frac{2\pi R^5 \varrho_{\text{lib}}^2}{9\epsilon_0} = 8.94 \text{ pJ}.$$

3.9 Due condensatori identici di capacità $C_1 = C_2 = 3.7$ pF e collegati in parallelo hanno facce piane e parallele in vuoto distanti tra loro $d = 1.1$ mm. Il sistema è caricato alla tensione $\Delta V_0 = 12$ V e quindi scollegato dal generatore. Successivamente lo spazio interno del primo condensatore è riempito con un dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 5.3$. Si calcolino:

- le capacità iniziale C_0 e finale C' del sistema;
- i campi elettrici iniziali E_1 e E_2 e finali E'_1 e E'_2 nei due condensatori;
- le energie elettrostatiche iniziali U_0 e finale U' del sistema, il lavoro meccanico \mathcal{L} svolto dal sistema nell'introduzione del dielettrico e l'energia U_J dissipata nell'operazione.

Svolgimento:

a)

$$C_0 = 2C_1 = 7.40 \text{ pF}, \quad C' = (\epsilon_r + 1)C_1 = 23.3 \text{ pF};$$

b)

$$E_1 = E_2 = \frac{\Delta V_0}{d} = 10.9 \text{ kV/m}, \quad E'_1 = E'_2 = \frac{\Delta V'}{d} = \frac{C_0 \Delta V_0}{C' d} = \frac{2\Delta V_0}{(\epsilon_r + 1)d} = 3.46 \text{ kV/m};$$

c)

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 \Delta V_0^2 = C_1 \Delta V_0^2 = 533 \text{ pJ}, \quad U' = \frac{(C_0 \Delta V_0)^2}{2C'} = \frac{2C_1 \Delta V_0^2}{\epsilon_r + 1} = 169 \text{ pJ},$$

$$\mathcal{L} = U_0 - U' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} C_1 \Delta V_0^2 = 364 \text{ pJ}, \quad U_J = 0.$$

3.10 Si calcoli:

- l'energia elettrostatica U_e di una carica elettrica $q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C distribuita uniformemente su una superficie sferica di raggio $r_e = 2.8$ fm; si calcoli anche l'energia U'_e della stessa distribuzione di carica nel caso in cui la sfera sia piena di un materiale dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3.1$;
- l'energia elettrostatica U di una carica elettrica $Q = 7.4 \times 10^{-18}$ C distribuita uniformemente all'interno di una sfera di raggio $R = 7.1$ fm; si calcoli anche l'energia elettrostatica U' della stessa distribuzione di carica nel caso in cui il volume della sfera sia polarizzabile con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3.1$.
- Supponendo di avere due cariche Q distribuite uniformemente all'interno di due sfere di raggio R si calcoli l'energia ΔU necessaria per ottenere una singola sfera di carica $2Q$ con la stessa densità di carica di volume delle due cariche componenti.

Svolgimento:

a)

$$U_e = \frac{1}{2} \int \sigma \phi dS = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r_e} = 4.11 \times 10^{-14} \text{ J} = 257 \text{ keV} = U'_e$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

b)

$$U = \int \varphi_Q dQ = \int_0^R \frac{(4/3)\pi r^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 r} 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi \rho^2 R^5}{15\epsilon_0} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = 4.16 \times 10^{-11} \text{ J} = 260 \text{ MeV}$$

Scriviamo l'energia come

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV.$$

Esternamente alla sfera i campi elettrici non sono alterati dalla presenza del dielettrico. All'interno lo è solo \mathbf{E} . Si ha quindi

$$U' - U = \frac{1}{2} \int_{\text{sfera}} (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{D} dV = \frac{1 - \epsilon_r}{2\epsilon_r} \int_0^R \frac{\rho^2 r^2}{9\epsilon_0} 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi \rho^2 R^5 (1 - \epsilon_r)}{90\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q^2 (1 - \epsilon_r)}{40\pi\epsilon_0 \epsilon_r R}$$

Si ha quindi

$$U' = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q^2 (1 - \epsilon_r)}{40\pi\epsilon_0 \epsilon_r R} = U \frac{1 + 5\epsilon_r}{6\epsilon_r} = 3.69 \times 10^{-11} \text{ J} = 231 \text{ MeV}$$

c)

$$\Delta U = \frac{3}{5} \frac{(2Q)^2}{4\pi\epsilon_0 R'} - 2U = 2U (2^{2/3} - 1) = 4.89 \times 10^{-11} \text{ J} = 306 \text{ MeV}$$

3.11 Un condensatore piano è formato da due lastre metalliche parallele quadrate di lato $L = 5.3 \text{ cm}$ separate in aria da una distanza $d_0 = 4.3 \text{ mm}$. Le lastre sono caricate ad una differenza di potenziale $V_0 = 120 \text{ V}$. Si calcoli:

a) la capacità C_0 del sistema, la sua energia U_0 e il campo elettrico E_0 nello spazio tra le lastre.

Tra le due lastre si inserisce una lastra di dielettrico di spessore $d_1 = 1.3 \text{ mm}$, costante dielettrica $\epsilon_r = 2.3$ e rigidità dielettrica $E_{\text{bd,dielettrico}} = 100 \text{ kV/cm}$. Sapendo che l'aria secca ha rigidità dielettrica $E_{\text{bd,aria}} = 30 \text{ kV/cm}$ si calcoli:

b) la capacità C_V del sistema, e i campi elettrici $E_{V,\text{aria}}$ nell'aria e $E_{V,\text{dielettrico}}$ nel dielettrico.

c) Si ripeta il punto precedente supponendo di avere scollegato il condensatore dal generatore prima dell'inserimento della lastra. Si calcolino quindi C_Q , $E_{Q,\text{aria}}$ e $E_{Q,\text{dielettrico}}$.

Svolgimento:

a)

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 L^2}{d_0} = 5.78 \text{ pF}, \quad U_0 = \frac{C_0 V_0^2}{2} = 41.6 \text{ nJ}, \quad E_0 = \frac{V_0}{d_0} = 27.9 \text{ kV/cm};$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$;

b)

$$C_V = \frac{\frac{\epsilon_0 L^2}{d_0 - d_1} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r L^2}{d_1}}{\frac{\epsilon_0 L^2}{d_0 - d_1} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r L^2}{d_1}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r L^2}{\epsilon_r (d_0 - d_1) + d_1} = 6.97 \text{ pF}.$$

Se il condensatore non scaricasse, i campi elettrici sarebbero dati dalle espressioni

$$E_{V,aria} = \frac{V_0 C_V}{\epsilon_0 L^2} = 33.7 \text{ kV/cm} \quad \text{e} \quad E_{V,dielettrico} = \frac{V_0 C_V}{\epsilon_0 \epsilon_r L^2} = 14.6 \text{ kV/cm},$$

ma essendo $E_{V,aria} > E_{bd,aria}$, il valore del campo elettrico in aria è $E'_{V,aria} = 0$. Di conseguenza

$$C'_V = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r L^2}{d_1} = 44.0 \text{ pF} \quad \text{e} \quad E'_{V,dielettrico} = \frac{V_0}{d_1} = \frac{V_0 C'_V}{\epsilon_0 \epsilon_r L^2} = 92.3 \text{ kV/cm} < E_{bd,dielettrico};$$

c)

$$C_Q = C_V, \quad E_{Q,aria} = E_0, \quad E_{Q,dielettrico} = \frac{E_{Q,aria}}{\epsilon_r} = 12.1 \text{ kV/cm} < E_{bd,dielettrico}.$$

3.12 Una densità uniforme di carica di volume $\varrho_1 = 5.9 \mu\text{C}/\text{m}^3$ occupa un guscio sferico di raggi interno ed esterno $r_1 = 1.1 \text{ cm}$ e $r_2 = 2.3 \text{ cm}$. Concentrico al primo, un secondo guscio di materiale dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4.3$ ha raggi interno ed esterno r_2 e $r_3 = 4.7 \text{ cm}$. A sua volta il dielettrico è contenuto in un guscio conduttore di raggi interno ed esterno r_3 e $r_4 = 9.7 \text{ cm}$ che è stato caricato con una carica $q_2 = 0.31 \text{ nC}$. Si calcoli:

- l'espressione del campo elettrico $E_1(r)$ nel primo guscio e il suo valore alla coordinata radiale $r_0 = 1.9 \text{ cm}$;
- la carica totale q_p nel dielettrico e la densità superficiale $\sigma_p(r_3)$ della carica di polarizzazione presente sulla superficie esterna del dielettrico;
- la differenza di potenziale $\Delta V = V_3 - V_2$ tra le due superfici del dielettrico e il potenziale elettrostatico V_0 nel centro del sistema rispetto all'infinito.

Svolgimento:

a)

$$E_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\varrho_1 \frac{4}{3}\pi (r^3 - r_1^3)}{r^2}, \quad E_1(r_0) = 3.40 \text{ kV/m},$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$;

b) per la carica totale, $q_p = 0$. Indicando con

$$q_1 = \varrho_1 \frac{4}{3}\pi (r_2^3 - r_1^3) = 268 \text{ pC}$$

la carica contenuta nel primo guscio,

$$\sigma_p(r_3) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q_1}{4\pi r_3^2} = 7.40 \text{ nC/m}^2;$$

c)

$$\Delta V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right) = -12.4 \text{ V}, \quad V_0 = \int_{r_1}^{r_2} E_1(r) dr - \Delta V + \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r_4} = 97.3 \text{ V}.$$

3.13 Un condensatore piano è costituito da due lastre metalliche quadrate di lato $a = 7.3$ cm mantenute parallele a distanza $x = 1.3$ mm e in posizione verticale. Il bordo inferiore delle lastre sfiora la superficie libera di una vasca piena di olio per trasformatori di densità $\rho = 0.83$ kg/L e costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 5.3$. Trascurando gli effetti di bordo, si calcoli:

- il valore della capacità C_0 del condensatore scarico e vuoto e l'espressione della capacità C_z del condensatore carico e pieno di liquido fino all'altezza $z < a$;
- l'altezza z_0 del liquido statico nel condensatore carico alla differenza di potenziale $V_0 = 6.7$ kV;
- la differenza ΔU tra l'energia immagazzinata, alla tensione V_0 , nel condensatore con il liquido e in quello vuoto.

Svolgimento:

a)

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 a^2}{x} = 36.3 \text{ pF}, \quad C_z = \frac{\epsilon_0 a [(\epsilon_r - 1)z + a]}{x},$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m;

- b) all'equilibrio, la forza con la quale il liquido è risucchiato all'interno del condensatore uguaglia il peso della colonna di liquido:

$$F_z = \frac{V_0^2}{2} \frac{dC_z}{dz} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) V_0^2 a}{2x} = \rho a z_0 x g \quad \longrightarrow \quad z_0 = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) V_0^2}{2 \rho g x^2} = 6.21 \text{ cm}$$

dove $g = 9.81$ m/s²;

c)

$$\Delta U = \frac{1}{2} (C_{z_0} - C_0) V_0^2 = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) a z_0}{2x} V_0^2 = \rho a x z_0^2 g = 2.98 \text{ mJ}.$$

3.14 Si consideri una sfera cava di raggi interno ed esterno $a = 1.3$ mm e $b = 2.3$ mm di un materiale di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4.7$. Si considerino i due casi: α) il guscio dielettrico contiene una sfera conduttrice di raggio a ; e β) il guscio dielettrico è metallizzato esternamente. In entrambi i casi il conduttore ha una carica $Q = 79$ pC. Per ciascuno dei due casi si determinino:

- le espressioni del campo elettrico $\mathbf{E}_{\alpha,\beta}(r)$ e del potenziale $\varphi_{\alpha,\beta}(r)$ in tutto lo spazio;
- le espressioni del vettore densità di polarizzazione $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}(r)$ e delle eventuali cariche di polarizzazione di superficie $\sigma_{\alpha,\beta}(a)$ e $\sigma_{\alpha,\beta}(b)$ e di volume $\rho_{\alpha,\beta}(r)$;
- i valori della capacità del sistema $C_{\alpha,\beta}$ e della sua energia elettrostatica $U_{\alpha,\beta}$.

Svolgimento:

a)

$$\mathbf{E}_\alpha(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} & a < r < b \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} & b < r \end{cases} \quad \varphi_\alpha(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[\frac{1}{a} + \frac{\chi}{b} \right] = 359 \text{ V} & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left[\frac{1}{r} + \frac{\chi}{b} \right] & a < r < b \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & b < r \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_\beta(r) = \begin{cases} 0 & r < b \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} & b < r \end{cases} \quad \varphi_\beta(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{b} = 309 \text{ V} & r < b \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & b < r \end{cases}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ e $\chi = \epsilon_r - 1$;

b)

$$\mathbf{P}_\alpha(r) = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_r} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \sigma_\alpha(a) = -\frac{\chi}{4\pi\epsilon_r} \frac{Q}{a^2} = -2.93 \mu\text{C/m}^2, \quad \sigma_\alpha(b) = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_r} \frac{Q}{b^2} = 0.936 \mu\text{C/m}^2,$$

$$P_\beta(r) = \sigma_\beta(a) = \sigma_\beta(b) = 0, \quad \rho_\alpha(r) = \rho_\beta(r) = 0;$$

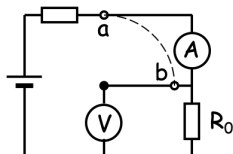
c)

$$C_\alpha = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r ab}{\chi a + b} = 0.220 \text{ pF}, \quad U_\alpha = \frac{Q^2(\chi a + b)}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r ab} = 14.2 \text{ nJ},$$

$$C_\beta = 4\pi\epsilon_0 b = 0.256 \text{ pF}, \quad U_\beta = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 b} = 12.2 \text{ nJ}.$$

4 Esercizi sulla corrente elettrica

4.1 Nel circuito in figura, con $R_0 = 143 \Omega$ le letture dei due strumenti con il deviatore nelle due

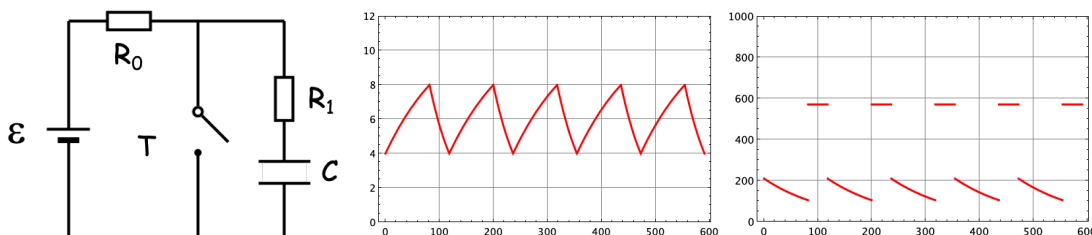


posizioni sono $V_a = 14.3 \text{ V}$, $I_a = 91.6 \text{ mA}$, e $V_b = 13.0 \text{ V}$, $I_b = 98.6 \text{ mA}$. Si determinino i valori R_V e R_A delle resistenze interne dei due strumenti.

Svolgimento:

$$R_A = \frac{V_a}{I_a} - R_0 = 13.1 \Omega; \quad \frac{1}{R_V} = \frac{I_b}{V_b} - \frac{1}{R_0} \quad \longrightarrow \quad R_V = 1690 \Omega.$$

4.2 Nel circuito in figura l'interruttore si chiude quando $V_C = 2\mathcal{E}/3$ e si apre quando $V_C = \mathcal{E}/3$.



Con $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, $R_0 = 21 \Omega$, $R_1 = 17 \Omega$ e $C = 3.1 \mu\text{F}$

- si determinino le costanti di tempo τ_c e τ_s di carica e di scarica del condensatore;
- si faccia il grafico della forma d'onda $V_C(t)$ e se ne calcoli la frequenza ν ;
- si calcoli la corrente $I(t)$ erogata dal generatore e se ne faccia il grafico.

Svolgimento:

a)

$$\tau_c = (R_0 + R_1)C = 118 \mu\text{s}, \quad \tau_s = R_1 C = 52.7 \mu\text{s};$$

b)

$$V_C(t) = \begin{cases} \frac{\mathcal{E}}{3} + \frac{2\mathcal{E}}{3} (1 - e^{-t/\tau_c}) & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{2\mathcal{E}}{3} e^{-t/\tau_s} & t_1 \leq t \leq T, \end{cases}$$

dove $t_1 = \tau_c \ln 2 = 81.7 \mu\text{s}$ e $t_2 = \tau_s \ln 2 = 36.6 \mu\text{s}$ sono i tempi di raddoppio e di dimezzamento e $T = t_1 + t_2 = 118 \mu\text{s}$. La frequenza è quindi

$$\nu = \frac{1}{T} = 8.46 \text{ kHz};$$

c)

$$I(t) = \begin{cases} \frac{\mathcal{E} - V_C(t)}{R_0 + R_1} = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{E}}{R_0 + R_1} e^{-t/\tau_c} & 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{\mathcal{E}}{R_0} = 571 \text{ mA} & t_1 \leq t \leq T. \end{cases}$$

4.3 Un condensatore a facce piane e parallele di area $S = 130 \text{ cm}^2$ poste a distanza $d = 1.9 \text{ cm}$ è riempito di azoto a pressione $P = 1.0 \text{ atm}$ e temperatura $T = 300 \text{ K}$ ed è carico ad una differenza di potenziale $\Delta V = 0.97 \text{ kV}$. Il gas è esposto ad una lampada a raggi X che ionizza (uniformemente nel volume) una certa frazione delle molecole di $^{14}\text{N}_2$; gli ioni si raccolgono al catodo generandovi una corrente $I = 1.7 \mu\text{A}$. Sapendo che nel gas il cammino libero medio delle molecole è $\lambda = 0.11 \mu\text{m}$, si calcoli:

- la conduttività σ del gas ionizzato;
- il tempo medio τ tra due collisioni di uno ione $^{14}\text{N}_2^+$;
- la frazione f di molecole ionizzate.

Svolgimento:

a)

$$\sigma = \frac{I}{S \Delta V} = 2.56 \times 10^{-9} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = 2.56 \text{ nS/m};$$

b)

$$\tau = \frac{\lambda}{\sqrt{\langle v^2 \rangle}};$$

essendo

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_{\text{N}_2}}} = \sqrt{\frac{3kT}{28 \text{ uma}}} = 517 \text{ m/s}$$

dove $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ e $1 \text{ uma} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$, si ha

$$\tau = 213 \text{ ps};$$

c)

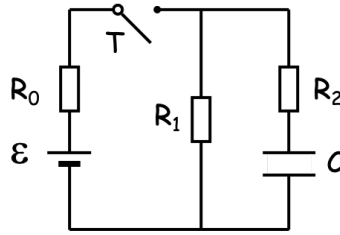
$$\sigma = \frac{n_{\text{N}_2^+} e^2 \tau}{m_{\text{N}_2}} \quad \longrightarrow \quad n_{\text{N}_2^+} = \frac{\sigma m_{\text{N}_2}}{e^2 \tau} = 2.19 \times 10^{13} \text{ m}^{-3} \quad \text{e} \quad f = \frac{n_{\text{N}_2^+}}{n_{\text{N}_2}},$$

dove $n_{\text{N}_2^+}$ è la densità numerica degli ioni e n_{N_2} la densità delle molecole:

$$n_{\text{N}_2} = \frac{N_A P}{RT} = 2.44 \times 10^{25} \text{ m}^{-3} \quad \longrightarrow \quad f = 8.94 \times 10^{-13},$$

dove $R = 8.31 \text{ J/mole}\cdot\text{K}$ e $N_A = 6.02 \times 10^{23}$.

4.4 Nel circuito in figura $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, $R_0 = 1.9 \Omega$, $R_1 = 9.7 \Omega$, $R_2 = 4.3 \Omega$ e $C = 1.7 \mu\text{F}$. Si determinino:



- a) le correnti erogate dal generatore alla chiusura dell'interruttore $I(0)$ e a regime $I(\infty)$, la corrente $I_C(0)$ che entra nel condensatore all'istante $t = 0$ e la tensione sul condensatore $V_C(\infty)$ a regime;
- b) le costanti di tempo di carica τ_c e di scarica τ_s del condensatore.

Svolgimento:

a)

$$I(0) = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = 2.46 \text{ A}; \quad I(\infty) = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + R_1} = 1.03 \text{ A}$$

$$I_C(0) = \frac{\mathcal{E} - I(0)R_0}{R_2} = 1.70 \text{ A} \quad V_C(\infty) = I(\infty)R_1 = 10 \text{ V};$$

- b) per la fase di carica, tenendo conto che $I_1 = I - dQ/dt$ le equazioni di Kirchhoff si scrivono

$$\mathcal{E} - R_0 I - R_1 \left[I - \frac{dQ}{dt} \right] = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{E} - R_0 I - R_2 \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0.$$

Ricavando I da una di queste, e sostituendo nell'altra si ha

$$\frac{dQ}{dt} (R_0 R_1 + R_1 R_2 + R_2 R_0) = -\frac{Q}{C} (R_0 + R_1) + \mathcal{E} R_1$$

da cui

$$\tau_c = \frac{R_0 R_1 + R_1 R_2 + R_2 R_0}{R_0 + R_1} C = 10.0 \text{ } \mu\text{s}.$$

Per la fase di scarica, invece, $\tau_s = (R_1 + R_2) C = 23.8 \text{ } \mu\text{s}.$

5 Esercizi di magnetostatica nel vuoto

5.1 Due nastri conduttori piani di un materiale di resistività $\rho = 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$, di spessore $\delta = 1 \text{ mm}$, altezza $\Delta y = 20 \text{ cm}$ e lunghezza $\Delta z \gg \Delta y$ sono affacciati a distanza $\Delta x = 1 \text{ cm}$. Un estremo dei nastri è mantenuto alla differenza di potenziale ΔV , mentre all'altro estremo i due nastri sono collegati elettricamente da un filo di resistenza trascurabile. Supponendo che le linee di corrente siano uniformemente distribuite sulla sezione dei conduttori si determini:

- il vettore campo elettrico \vec{E} nel piano mediano tra i due nastri;
- la corrente di superficie J nei due nastri e il vettore campo magnetico \vec{B} tra di essi;
- il valore di Δz per il quale una particella di carica q che attraversa longitudinalmente lo spazio tra i due conduttori con velocità $v_z = 10^4 \text{ m/s}$ non subisce una deflessione ma solo uno spostamento laterale. Si trascuri l'effetto della carica q sulla configurazione dei campi.

Svolgimento:

- nel piano mediano il campo elettrico è diretto secondo x nel verso dal conduttore positivo a quello negativo. Il suo valore dipende dalla coordinata z :

$$E_x(z) = \frac{\Delta V}{\Delta x} \frac{\Delta z - z}{\Delta z};$$

-

$$J = \Delta V \frac{\delta}{\rho 2 \Delta z}.$$

Il campo magnetico è uniforme e diretto secondo y nel verso dato dalla regola della mano destra

$$B_y = \mu_0 J;$$

- la forza sulla particella è data dalla forza di Lorentz

$$F_x(z) = qE_x(z) - qv_z B_y.$$

Affinché la deflessione sia nulla deve valere

$$qE_x(0) = 2qv_z B_y$$

in modo che la deflessione accumulata nella prima metà del percorso sia compensata da quella della seconda metà. L'equazione precedente si scrive quindi come

$$\Delta z = \frac{\mu_0}{\rho} v_z \delta \Delta x = 1.26 \text{ m}$$

5.2 In un esperimento sull'effetto Hall una corrente $I = 23 \text{ A}$ scorre in un nastro di rame di larghezza $\Delta x = 2.0 \text{ cm}$ e spessore $\Delta y = 0.10 \text{ mm}$ immerso in un campo $B_y = 1.5 \text{ T}$. Se si osserva una differenza di potenziale Hall $V_H = 196 \mu\text{V}$, si determini

- la densità n di portatori di carica nel metallo e la loro velocità di deriva v_d ;
- la forma delle superfici equipotenziali nel metallo e la componente z del campo elettrico in un punto nel piano del nastro immediatamente fuori del metallo.

Svolgimento:

a)

$$v_d = \frac{V_H}{B\Delta x} = 6.53 \text{ mm/s}, \quad n = \frac{j}{ev_d} = \frac{IB}{eV_H\Delta y} = 1.10 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

dove $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$;

b) le superfici equipotenziali disegnano nel piano del nastro linee rette inclinate rispetto all'asse x di un angolo

$$\theta = \pm \arctan \frac{E_x}{E_z} = \pm \arctan \frac{V_H}{\Delta x} \frac{1}{\rho j} = \pm \arctan \frac{V_H \Delta y}{\rho I} = \pm 2.87^\circ$$

dove $\rho = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ è la resistività del rame e il segno dipende dal segno dei portatori di carica. All'esterno del nastro

$$E_z = \rho j = \frac{\rho I}{\Delta x \Delta y} = 196 \text{ mV/m}.$$

5.3 Un condensatore a facce piane e parallele assimilabili a due piani infiniti è carico con densità di carica superficiale $\sigma = 5.3 \mu\text{C}/\text{m}^2$. La piastra positiva è il piano $z = d/2$, quella negativa il piano $z = -d/2$. Le due piastre si muovono con una stessa velocità costante $\mathbf{v} = 37 \hat{\mathbf{x}} \text{ m/s}$. Si calcoli:

- il campo magnetico \mathbf{B}_{12} nello spazio tra le due piastre, il campo magnetico \mathbf{B}_1 nel semispazio sopra la faccia positiva e il campo magnetico \mathbf{B}_2 nel semispazio sotto la faccia negativa;
- la forza magnetica per unità d'area \mathbf{f}_m agente sulla piastra positiva;
- il valore v_0 della velocità per la quale la forza complessiva su questa piastra è nulla.

Svolgimento:

a) il campo nei tre domini spaziali è la somma dei campi generati dai piani positivo e negativo: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_+ + \mathbf{B}_-$, e quindi

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = 0, \quad \mathbf{B}_{12} = (0, \mu_0 \sigma v, 0) = 2.46 \times 10^{-10} \hat{\mathbf{y}} \text{ T}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$;

b) la forza magnetica per unità d'area sulla piastra positiva si calcola come

$$\mathbf{f}_m = \sigma \mathbf{v} \times \mathbf{B}_- = \left(0, 0, \frac{\mu_0 \sigma^2 v^2}{2}\right) = 2.42 \times 10^{-14} \hat{\mathbf{z}} \text{ N/m}^2;$$

c) la forza elettrica per unità d'area sulla piastra positiva è

$$\mathbf{f}_e = \sigma \mathbf{E}_- = \left(0, 0, -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\right) = -14.0 \hat{\mathbf{z}} \text{ N/m}^2.$$

Per avere $\mathbf{f}_m + \mathbf{f}_e = 0$ bisognerebbe dunque che fosse

$$\mu_0 v_0^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

5.4 Un neutrone n e un antineutrone \bar{n} si trovano nelle posizioni $\mathbf{r}_n = (1.0, -2.0, 3.0) \times 10^{-14}$ m e $\mathbf{r}_{\bar{n}} = (-5.0, 7.0, -11) \times 10^{-14}$ m con i momenti magnetici allineati all'asse z ($m_n = m_{\bar{n}} = 9.7 \times 10^{-27}$ Am²). Si calcoli:

- il campo magnetico $\mathbf{B}(\mathbf{r}_n)$ alla posizione del neutrone;
- il momento della forza $\boldsymbol{\tau}$ che agisce sul neutrone;
- l'energia magnetica di interazione $U_{\text{m,int}}$ delle due particelle.

Svolgimento:

- Posto $\mathbf{r} = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{\bar{n}}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_n) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m}_{\bar{n}} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} - \mathbf{m}_{\bar{n}} r^2}{r^5} = (141, -212, 154) \text{ kT}, \quad B(\mathbf{r}_n) = 297 \text{ kT}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

-

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m}_n \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_n) = (2.05, 1.37, 0) \times 10^{-21} \text{ Nm}, \quad \tau = 2.47 \times 10^{-21} \text{ Nm};$$

-

$$U_{\text{m,int}} = -\mathbf{m}_n \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_n) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m}_n \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_{\bar{n}} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{m}_n \cdot \mathbf{m}_{\bar{n}} r^2}{r^5} = -1.49 \times 10^{-21} \text{ J} = -9.33 \text{ meV}.$$

5.5 Un disco di raggio $R_1 = 3.7$ cm, carico uniformemente con una densità di carica di superficie $\sigma_0 = -53$ nC/m² ruota attorno al suo asse con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = 0.11 \hat{\mathbf{z}}$ krad/s. Si calcoli:

- il campo magnetico $\mathbf{B}(0)$ nel centro del disco;
- il momento di dipolo magnetico \mathbf{m} del disco;
- il potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)$ nel punto $\mathbf{r}_1 = (19, -31, 53)$ cm;

Svolgimento:

-

$$B_z(0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{R_1} \frac{\omega_z \sigma_0 (2\pi\rho)^2 d\rho}{\rho^2} = \frac{\mu_0 \omega_z \sigma_0}{2} R_1 = -136 \text{ fT}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

-

$$m_z = \frac{\omega_z}{2\pi} \int_0^{R_1} \pi\rho^2 \sigma_0 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi\omega_z \sigma_0 R_1^4}{4} = -8.58 \text{ pA} \cdot \text{m}^2;$$

-

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} = (-1.00, -0.614, 0.00) \times 10^{-18} \text{ T} \cdot \text{m}, \quad A(\mathbf{r}_1) = 1.18 \times 10^{-18} \text{ T} \cdot \text{m}.$$

5.6 Calcolare l'espressione del potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ nel *gauge* di Coulomb

- a) in tutto lo spazio per un solenoide cilindrico indefinito di raggio R , con n spire per unità di lunghezza percorse da una corrente I ;
- b) sull'asse di un solenoide toroidale di raggio medio R e sezione $\Sigma \ll R^2$, con N spire percorse da una corrente I .

Svolgimento: Sfruttando il parallelo tra le equazioni per \mathbf{B} e per \mathbf{A} ($\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$, $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) si può sostituire $\Phi(\mathbf{B})$ a $\mu_0 \Phi(\mathbf{J}) = \mu_0 I$:

a)

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r A_\phi = \Phi(\mathbf{B}) \quad \longrightarrow \quad A_\phi(r) = \begin{cases} \frac{Br}{2} = \frac{\mu_0 n I r}{2} & r < R \\ \frac{BR^2}{2r} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2r} & R < r; \end{cases}$$

b)

$$A_z(z) = \frac{B\Sigma R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 N I R \Sigma}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

5.7 Una spira circolare di raggio $R = 13$ cm percorsa da una corrente $I = 1.7$ A giace nel piano $z = 0$ con centro nell'origine. Il verso della corrente è legato al verso positivo dell'asse z dalla regola della mano destra. Si calcoli:

- a) l'espressione del campo magnetico $\mathbf{B}(0, 0, z)$ sull'asse della spira;
- b) l'energia magnetica U_m di un dipolo magnetico $\mathbf{m}_B = (0, 0, 11) \mu\text{A m}^2$ posto sull'asse della spira alla posizione $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 3R/2)$;
- c) la forza \mathbf{F}_B e il momento della forza \mathbf{M}_B agenti sul dipolo.

Svolgimento:

a)

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = B_z(z) \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi R \sqrt{R^2 + z^2}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}};$$

b)

$$U_m = -\mathbf{m}_B \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = -\frac{4\mu_0 I m_B}{13\sqrt{13}R} = -15.4 \text{ pJ};$$

c)

$$\mathbf{F}_B = -\nabla U_m|_{\mathbf{r}_0} = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 I m_B R^2 z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \Big|_{\mathbf{r}_0} \hat{\mathbf{z}} = -164 \hat{\mathbf{z}} \text{ pN}, \quad \mathbf{M}_B = \mathbf{m}_B \times \mathbf{B} = 0.$$

5.8 Una corona circolare di raggio interno $a = 2.3$ cm e raggio esterno $b = 4.7$ cm, carica con densità di carica superficiale $1.7 \mu\text{C}/\text{m}^2$ ruota attorno al proprio asse con velocità angolare $\omega = 0.13$ krad/s. Si calcoli:

- a) il campo magnetico \mathbf{B}_0 nel centro della corona;

- b) il potenziale vettore $\mathbf{A}(z_0)$ sull'asse della corona nel punto $\mathbf{r}_0 = (0, 0, z_0)$ con $z_0 = 9.7$ cm;
 c) il potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{r}_1)$ nel punto $\mathbf{r}_1 = (19, -31, 53)$ cm.

Svolgimento:

a)

$$B_{0z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_a^b \frac{2\pi r \omega \sigma r dr}{r^2} = \frac{\mu_0}{2} \omega \sigma (b - a) = 3.33 \times 10^{-12} \text{ T};$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

b)

$$\mathbf{A}(z_0) = 0;$$

c) il momento magnetico della corona è

$$m_z = \int_a^b \pi r^2 \frac{\omega}{2\pi} \sigma 2\pi r dr = \frac{\pi \omega \sigma}{4} (b^4 - a^4),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} = (9.32, 5.71, 0.00) \times 10^{-17} \text{ T} \cdot \text{m}.$$

5.9 Un filo rettilineo di diametro $2a = 1.1$ mm è percorso da una densità uniforme di corrente per unità di volume $J_z = 0.53$ MA/m². Si calcoli:

- a) il potenziale vettore $\mathbf{A}_1(\rho_0)$ in un piano ortogonale al filo a distanza $\rho_0 = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} = 3.1$ mm dal suo centro;
 b) il campo magnetico $\mathbf{B}_1(\rho_0)$ nello stesso punto.

Si dispone un secondo filo identico al primo e parallelo ad esso col centro a distanza $\Delta \boldsymbol{\rho} = -\Delta y \hat{\mathbf{y}}$ dal centro del primo; il secondo filo porta una densità di corrente per unità di volume $-\mathbf{J}$. Si calcoli:

- c) l'espressione del potenziale vettore $\mathbf{A}_2(\boldsymbol{\rho})$ nel piano ortogonale al filo nel generico punto $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ per $\rho \gg \Delta y$.

Svolgimento:

a) scegliendo arbitrariamente la superficie del filo come riferimento del potenziale

$$A_{1z}(\rho_0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{\rho_0} = -1.71 \mu\text{T} \cdot \text{m}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m e $I = J_z \pi a^2$;

b)

$$B_{1\phi}(\rho_0) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho_0} = 3.21 \text{ G};$$

c) scegliamo lo zero del potenziale a metà strada tra i due fili:

$$A_{2z}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln \frac{\Delta y/2}{|\boldsymbol{\rho} + \Delta \boldsymbol{\rho}/2|} - \ln \frac{\Delta y/2}{|\boldsymbol{\rho} - \Delta \boldsymbol{\rho}/2|} \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{|\boldsymbol{\rho} + \Delta y \hat{\mathbf{y}}/2|}{|\boldsymbol{\rho} - \Delta y \hat{\mathbf{y}}/2|} =$$

$$\approx \frac{\mu_0 I}{2\pi} \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \ln \rho = \frac{\mu_0 I \Delta y}{2\pi} \frac{y}{\rho^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{|\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\rho}|}{\rho^2}$$

dove $\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{J} \times \Delta \boldsymbol{\rho}) \pi a^2 = I \Delta y \hat{\mathbf{x}}$ è il momento magnetico per unità di lunghezza.

5.10

- Si calcoli l'energia elettrostatica U_e di una carica q distribuita su una superficie sferica di raggio r_0 ;
- supponendo che l'elettrone sia una tale superficie sferica carica e che la sua energia elettrostatica U_e sia pari all'energia $m_e c^2$ della particella a riposo, quale risulterebbe essere il raggio r_0 dell'elettrone?
- a quale velocità angolare ω dovrebbe ruotare l'elettrone per generare il suo momento magnetico di spin $m_s = e\hbar/2m_e$ ($\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J·s)?

Svolgimento:

a)

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0};$$

b)

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 1.40 \text{ fm},$$

dove $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C, $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg e $c = 3.00 \times 10^8$ m/s;

- una superficie sferica di raggio r_0 carica con densità superficiale σ e rotante con velocità angolare ω genera un momento magnetico pari a

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^\pi \pi r_0^2 \sin^2 \theta \sigma 2\pi r_0 \sin \theta r_0 d\theta = \frac{4\pi r_0^4 \omega \sigma}{3} \quad \longrightarrow \quad \omega = \frac{3\hbar}{2m_e r_0^2} = 8.77 \times 10^{25} \text{ rad/s.}$$

5.11 Per un dipolo magnetico \mathbf{m}_0

- si scriva l'espressione del campo magnetico $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ da esso generato a distanza \mathbf{r} ;
- si scriva l'espressione dell'energia magnetostatica $U_{\text{m,ext}}$ contenuta nello spazio esterno ad una superficie sferica di raggio r_0 con centro alla posizione del dipolo.
- Sapendo che l'elettrone ha un momento magnetico di spin $m_s = e\hbar/2m_e$ ($\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J·s), quale risulterebbe essere il raggio r_0 dell'elettrone se la sua energia magnetostatica $U_{\text{m,ext}}$ fosse pari all'energia $m_e c^2$ della particella a riposo?

Svolgimento:

a)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}_0}{r^5}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

b)

$$U_{m,ext} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{r>r_0} B^2 dV = \frac{\mu_0 m_0^2}{16\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^4} \int_0^\pi (3 \cos^2 \theta + 1) \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 m_0^2}{12\pi r_0^3};$$

c)

$$r_0 = \left[\frac{\mu_0 e^2 \hbar^2}{48\pi m_e^3 c^2} \right]^{1/3} = 32.6 \text{ fm}$$

dove $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C, $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg e $c = 3.00 \times 10^8$ m/s.

5.12 Un lungo nastro di un materiale dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4.1$ ha spessore $\Delta y = 1.7$ mm e altezza $\Delta x \gg \Delta y$ e scorre con velocità $v_z = 3.7$ m/s in un campo magnetico uniforme $B_x = 1.1$ T. Si calcoli:

- l'espressione della forza magnetica \mathbf{F}_m sentita da una carica q all'interno del materiale;
- l'espressione della densità di polarizzazione $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ in funzione della forza magnetica e del campo elettrico \mathbf{E} ; qual è l'origine di questo campo elettrico?
- il valore della densità di polarizzazione $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ nel materiale e la differenza di potenziale ΔV tra le due facce del nastro.

Svolgimento:

a)

$$\mathbf{F}_m = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = q v_z B_x \hat{\mathbf{y}};$$

b)

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \left(\frac{\mathbf{F}_m}{q} + \mathbf{E} \right)$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m. Il campo elettrico E è generato dalle cariche di polarizzazione che compaiono sulle superfici del nastro come un campo depolarizzante $E_y = -P_y/\epsilon_0$;

c) indichiamo con E_m il campo F_m/q . Si ha

$$\frac{P_y}{\epsilon_0 \chi_e} = E_m + E_y = v_z B_x - \frac{P_y}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad P_y = \epsilon_0 \frac{\chi_e}{\epsilon_r} v_z B_x = 27.2 \text{ pC/m}^2,$$

$$\Delta V = \frac{F_m}{q \epsilon_r} \Delta y = \frac{v_z B_x \Delta y}{\epsilon_r} = 1.69 \text{ mV}.$$

5.13 Date una spira quadrata di lato $2a$ e una spira circolare di diametro $2a$ percorse dalla stessa corrente I si calcoli:

- a) il rapporto $R_0 = B_{\text{quad}}/B_{\text{circ}}$ tra i campi magnetici nel centro delle due spire;
- b) il rapporto $R_z = B_{z,\text{quad}}(z)/B_{z,\text{circ}}(z)$ degli andamenti asintotici dei due campi magnetici per $z \gg 2a$;
- c) l'espressione della componente radiale del campo magnetico $B_{\rho,\text{circ}}(\rho, z)$ in un intorno dell'asse.

Svolgimento:

a)

$$B_{\text{quad}} = 4 \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{a dy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \left[\frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right]_{-a}^a = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}, \quad B_{\text{circ}} = \frac{\mu_0 I}{2a},$$

$$R_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0.900;$$

b)

$$R_z = \frac{4a^2}{\pi a^2} = \frac{4}{\pi} = 1.27;$$

- c) essendo nullo il flusso del campo \mathbf{B} su qualsiasi superficie chiusa, costruiamo una scatola gaussiana cilindrica in asse con la spira, di raggio $\rho \ll a$ e altezza Δz . Il flusso attraverso le sue superfici vale

$$0 = \pi \rho^2 \Delta B_{z,\text{circ}} + 2\pi \rho \Delta z B_{\rho,\text{circ}} = \pi \rho^2 \frac{\partial B_{z,\text{circ}}}{\partial z} \Delta z + 2\pi \rho \Delta z B_{\rho,\text{circ}} \quad \longrightarrow \quad B_{\rho,\text{circ}} = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial B_{z,\text{circ}}}{\partial z}$$

ed essendo

$$B_{z,\text{circ}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \oint ds = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \longrightarrow \quad B_{\rho,\text{circ}} = \frac{3}{2} \frac{\mu_0 I \pi a^2 z \rho}{(a^2 + z^2)^{5/2}}.$$

5.14 Al centro di ciascuna delle sei facce di un cubo di lato $a = 8.3$ cm si trova una piccola spira circolare percorsa dalla corrente $I = 2.3$ A. I sei momenti magnetici di intensità $m = 53 \mu\text{A}\cdot\text{m}^2$ hanno tutti la direzione della normale esterna alla faccia. Si determini:

- a) il raggio R delle spire;
- b) l'energia complessiva di interazione U_m delle sei spire;
- c) il primo momento di multipolo non nullo della configurazione delle sei spire. Si giustifichi la risposta calcolando il campo magnetico $\mathbf{B} = (B_\rho, B_z)$ sull'asse di una delle spire in un punto a distanza $z \gg a$ dal centro del cubo.

Svolgimento:

a)

$$R = \sqrt{\frac{m}{\pi I}} = 2.71 \text{ mm};$$

spira	\mathbf{r}_i	\mathbf{m}_i	$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i$	$ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i $
1	$(0, a/2)$	$(0, m)$	–	–
2	$(0, -a/2)$	$(0, -m)$	$(0, a)$	a
3 → 6	$(a/2, 0)$	$(m, 0)$	$(-a/2, a/2)$	$a/\sqrt{2}$

b) le posizioni e i momenti magnetici delle sei spire sono, in coordinate cilindriche (ρ, z) :

$$U_m = \frac{\mu_0}{2} I_1 \sum_{i=2}^6 \Phi(B_i) \approx 3\mathbf{m}_1 \cdot [\mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) + 4\mathbf{B}_3(\mathbf{r}_1)]$$

dove i campi in $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ sono approssimati da quelli di dipolo

$$\mathbf{B}_i(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3[\mathbf{m}_i \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i)](\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i) - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i|^2 \mathbf{m}_i}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i|^5}$$

con $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m. Si ha quindi

$$U_m = \frac{3\mu_0 m_1}{4\pi} \left(-\frac{2m_2}{a^3} - \frac{3\sqrt{2}m_3}{a^3} \right) = -\frac{3(2 + 3\sqrt{2})\mu_0 m^2}{4\pi a^3} = -9.20 \text{ pJ};$$

c) quadrupolo. Infatti ($B_\rho = 0$ per simmetria) le prime due spire contribuiscono a $B_z(z)$ con

$$B_{z,1+2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{2m}{(z - a/2)^3} - \frac{2m}{(z + a/2)^3} \right] \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3ma}{z^4},$$

mentre ciascuna delle altre quattro genera un campo

$$B_{z,3 \rightarrow 6} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3ma}{2z^4} \quad \longrightarrow \quad B_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3ma}{z^4}.$$

6 Esercizi di magnetismo nei materiali

6.1 Un cilindro di ferro di lunghezza $L = 10$ cm e raggio $R = 2.5$ cm è uniformemente magnetizzato nella direzione parallela al suo asse. Sapendo che il momento di dipolo magnetico del cilindro è $m_z = 75$ Am² si calcoli:

- il vettore densità di magnetizzazione \mathbf{M} nel cilindro;
- il valore del campo di induzione magnetica \mathbf{B} al centro della faccia superiore del cilindro;
- il valore massimo $|H_{\max}|$ del campo magnetico \mathbf{H} sull'asse del cilindro.

Svolgimento:

a)

$$M_z = \frac{m_z}{\pi R^2 L} = 382 \text{ kA/m};$$

- b) il campo B all'interno del cilindro magnetizzato è lo stesso di quello di un solenoide di dimensioni finite con densità lineare di corrente pari a M_z . In un punto dell'asse del cilindro il campo B si calcola applicando la legge di Biot e Savart:

$$\begin{aligned} B_z(z_0) &= \frac{\mu_0}{2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{R^2 M_z}{[R^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} dz = \\ &= -\frac{\mu_0 M_z}{2} \int_{\theta_{\max}}^{\theta_{\min}} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 M_z}{2} (\cos \theta_{\min} - \cos \theta_{\max}) \end{aligned}$$

dove

$$\cos \theta_{\min} = \frac{\frac{L}{2} - z_0}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2} - z_0)^2}} \quad \cos \theta_{\max} = -\frac{\frac{L}{2} + z_0}{\sqrt{R^2 + (\frac{L}{2} + z_0)^2}}.$$

Nel punto $z_0 = \frac{L}{2}$

$$B_z\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\mu_0 M_z L}{2\sqrt{R^2 + L^2}} = 233 \text{ mT};$$

c)

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}.$$

Il campo di induzione magnetica B ha sull'asse un massimo al centro del cilindro, che arriva al valore $\mu_0 M_z$ solo in un cilindro con $\frac{R}{L} \approx 0$. Il valore di B trovato sopra può essere scritto come

$$\frac{\mu_0 M_z}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}}} < \frac{\mu_0 M_z}{2}.$$

Il campo H ha quindi la sua massima intensità proprio in quel punto, all'interno del materiale magnetico:

$$|H_{\max}| = \left| \frac{B_z\left(\frac{L}{2}\right)}{\mu_0} - M_z \right| = 197 \text{ kA/m}.$$

6.2 Un solenoide toroidale è costituito di $N = 170$ spire percorse da una corrente $I = 7.3$ A avvolte su un anello di ferro dolce a sezione circolare. L'anello ha lunghezza media $L = 37$ cm, sezione $S = 1.3$ cm² e un traferro di spessore $h = 2.3$ mm. Assumendo che il materiale risponda linearmente con una permeabilità magnetica relativa $\mu_r = 1100$ si calcoli:

- la forza magnetomotrice \mathcal{E}_{mm} applicata al circuito;
- il campo di induzione magnetica B nel traferro;
- la forza F tra le due facce del traferro.

Svolgimento:

a)

$$\mathcal{E}_{\text{mm}} = NI = 1.24 \text{ kA} \cdot \text{spira};$$

- b) per la continuità della sua componente normale, il campo B ha lo stesso valore nel ferro e nel traferro. Di conseguenza, dalla circuitazione del campo magnetico H nell'anello si ha

$$\oint H dL = NI \approx H_{\text{Fe}}L + H_{\text{aria}}h = \frac{B}{\mu_0} \left(\frac{L}{\mu_r} + h \right) \quad \longrightarrow \quad B = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{L + \mu_r h} = 592 \text{ mT}$$

dove $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m;

- c) per calcolare la forza si parte dall'energia magnetica

$$U_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV = \frac{S}{2} (H_{\text{Fe}}L + H_{\text{aria}}h) B = \frac{(SB)^2}{2\mu_0 \mu_r S} (L + \mu_r h)$$

e si ottiene la forza come

$$F = -\frac{dU_m}{dh} = -\frac{SB^2}{2\mu_0} = -18.1 \text{ N}$$

dove il segno negativo indica forza attrattiva. Lo stesso risultato si ottiene scrivendo l'energia magnetica come

$$U_m = \frac{\mu_0 \mu_r S \mathcal{E}_{\text{mm}}^2}{2(L + \mu_r h)}$$

e derivando rispetto ad h stavolta con segno positivo.

6.3 Si consideri un cilindretto magnetizzato uniformemente secondo il suo asse, di raggio $\rho_0 = 1.2$ cm e altezza $\Delta z_0 = \rho_0/2$. Assumendo l'origine dell'asse z nel centro del cilindretto, se il campo magnetico al centro della faccia superiore del cilindretto vale $B_{z0} = B_z(0, 0, \Delta z_0/2) = 350 \mu\text{T}$, si calcoli:

- la magnetizzazione M_z del cilindretto;
- il campo magnetico \mathbf{B} nel punto $\mathbf{r}_1 = (0, 4\rho_0, 8\Delta z_0)$;
- il potenziale vettore \mathbf{A} nello stesso punto.

Svolgimento:

- a) il campo magnetico al centro della faccia superiore del cilindretto è lo stesso di quello generato da un solenoide di identica geometria con corrente di superficie pari alla densità di magnetizzazione:

$$B_{z0} = \mu_0 M_z \frac{\Delta z_0}{\sqrt{\rho_0^2 + (\Delta z_0)^2}}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m. Si ha quindi

$$M_z = \sqrt{5} \frac{B_{z0}}{\mu_0} = 623 \text{ A/m};$$

- b) il momento di dipolo del cilindretto vale

$$m_z = M_z \pi \rho_0^2 \Delta z_0$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_1) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1 - r_1^2 \mathbf{m}}{r_1^5} = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi} \frac{(0, 3y_1 z_1, 2z_1^2 - y_1^2)}{(y_1^2 + z_1^2)^{5/2}} = \\ &= \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{B_{z0}}{2048} (0, 3, 1) = (0, 811, 270) \text{ nT}; \end{aligned}$$

- c)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} = -\frac{\mu_0 m_z}{4\pi} \frac{y_1}{(y_1^2 + z_1^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{x}} = -\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{B_{z0} \rho_0}{256} \hat{\mathbf{x}} = -25.9 \hat{\mathbf{x}} \text{ nT} \cdot \text{m}.$$

6.4 Si consideri un toro a sezione quadrata di materiale magnetico di raggi interno ed esterno $R_1 = 1.9$ cm e $R_2 = 2.3$ cm. La magnetizzazione nel materiale può essere considerata avere valore costante $M = 0.47$ MA/m e circolare all'interno del toro così da poter essere scritta come $\mathbf{M} = M \hat{\phi}$.

- a) Si calcoli il campo di induzione magnetica \mathbf{B} e il campo \mathbf{H} all'interno del materiale;
b) nel caso in cui nel toro sia praticato un traferro di spessore $d = 3.1$ mm, si calcolino i due campi all'interno del materiale e nel traferro.

Svolgimento:

- a) La magnetizzazione costante è equivalente ad una corrente di superficie $\mathbf{K} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$ che scorre sulla superficie del toro, dove $\hat{\mathbf{n}}$ è la normale alla superficie del toro. Il teorema di Ampère per una circonferenza γ di raggio $R_1 \leq r \leq R_2$ si scrive allora come

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{B}) = 2\pi r B_\phi = 2\pi R_1 \mu_0 M \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M} \frac{R_1}{r} \approx \mu_0 \mathbf{M} = 591 \hat{\phi} \text{ mT}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m. Il campo \mathbf{H} è

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \left(\frac{R_1}{r} - 1 \right) \mathbf{M} \approx 0;$$

b) in presenza del traferro, per la solenoidalità di \mathbf{B} , il teorema di Ampère si scrive

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{B}) = 2\pi r B_\phi = (2\pi R_1 - d)\mu_0 M \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B} \approx \mu_0 \mathbf{M} \left[1 - \frac{d}{\pi(R_1 + R_2)} \right] = 577 \hat{\phi} \text{ mT}.$$

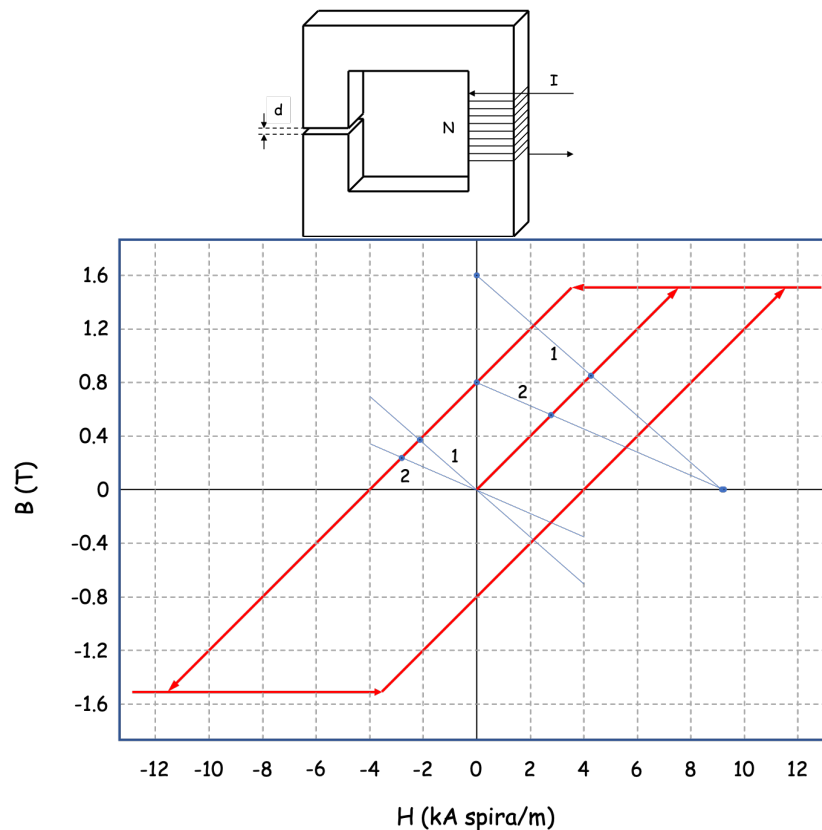
Il campo \mathbf{H} nel materiale vale allora

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \approx -\mathbf{M} \frac{d}{\pi(R_1 + R_2)} = -11.0 \hat{\phi} \text{ kA/m},$$

mentre in aria

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \approx \mathbf{M} \left[1 - \frac{d}{\pi(R_1 + R_2)} \right] = 0.459 \hat{\phi} \text{ MA/m}.$$

6.5 Un elettromagnete a C è un circuito magnetico di lunghezza complessiva media $L = 1.4 \text{ m}$



con un traferro di spessore d . Il dispositivo è realizzato con un materiale il cui ciclo di isteresi è schematizzato in figura. Il circuito è alimentato da un avvolgimento di $N = 98$ spire percorse dalla corrente $I = 0.13 \text{ kA}$.

a) Si scriva la legge di Ampère per il circuito in oggetto;

- b) supponendo di raggiungere il punto di lavoro percorrendo la curva di prima magnetizzazione del materiale, si determini graficamente il campo magnetico B_1 nel traferro supponendo che esso abbia spessore 1.0 cm, e il campo B_2 nel caso in cui il traferro abbia invece spessore 2.0 cm;
- c) si supponga di aumentare la corrente fino a raggiungere la saturazione del materiale e di portarla successivamente a zero. Si determini di nuovo il campo magnetico B_0 nel traferro nei due casi.

Svolgimento:

a)

$$H(L-d) + H_0d = H(L-d) + \frac{B}{\mu_0}d = NI \quad \longrightarrow \quad B = -\mu_0 \frac{L-d}{d}H + \mu_0 \frac{NI}{d}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, H il campo nel materiale e H_0 il campo nel traferro.

- b) all'ultima equazione corrispondono le rette in figura dalle quali si ricava $B_1 \approx 0.85$ T e $B_2 \approx 0.57$ T;
- c) per $I = 0$ le rette passano per l'origine con le stesse pendenze; i campi magnetici risultano nei due casi $B_0 \approx 0.37$ T e $B_0 \approx 0.24$ T.

6.6 Un solenoide toroidale è costituito di $N_p = 290$ spire avvolte su un anello di un materiale ferromagnetico vergine e percorse da una corrente I . L'anello ha lunghezza media $L = 37$ cm e una sezione $S = 1.3$ cm². Sul toroide è presente anche un avvolgimento secondario di $N_s = 5$ spire collegate ad un galvanometro balistico, di resistenza elettrica complessiva $R = 7.3$ Ω . In corrispondenza dell'aumento della corrente nel primario in passi $\Delta I = 200$ mA si registrano i seguenti valori di carica Δq_i nel galvanometro:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δq_i (microcoulomb)	6.23	4.45	3.74	2.94	2.23	2.05	1.60	1.51	1.07	0.89

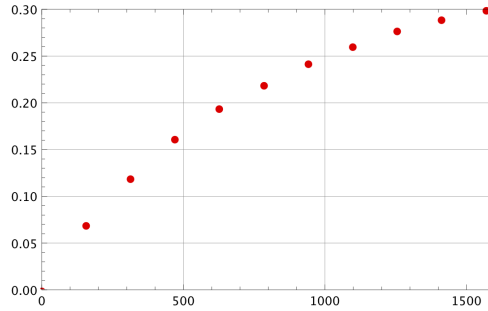
- a) Si disegni la curva di prima magnetizzazione del materiale;
- b) si calcoli l'intensità della magnetizzazione M raggiunta dal materiale.

Svolgimento:

- a) A ciascun incremento della corrente ΔI corrisponde un incremento del campo H nel materiale $\Delta H = N_p \Delta I / L = 157$ A·spira/m. I corrispondenti incrementi del campo magnetico ΔB_i inducono effetto Faraday nel circuito secondario generando i passaggi di carica $\Delta q_i = N_s S \Delta B_i / R$.
- b)

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{R}{\mu_0 N_s S} \sum_i \Delta q_i - 1.57 \text{ kA} \cdot \text{spira/m} = 237 \text{ kA/m.}$$

6.7 Un cilindretto di materiale paramagnetico di permeabilità magnetica relativa $\mu_r = 3.1$ è sospeso sulla bocca di un solenoide semi-infinito di raggio $R = 4.9$ cm con $n = 33$ spire/cm percorse da una corrente $I = 13$ A. Il cilindretto ha diametro $D = 3.7$ mm e altezza $h = 1.1$ mm. Si calcoli



- l'espressione del campo magnetico $\mathbf{B}(z)$ sull'asse del solenoide in funzione della distanza z dalla bocca;
- l'espressione del momento magnetico $\boldsymbol{\mu}(z)$ del cilindretto in funzione della distanza z del suo centro dalla bocca del solenoide;
- l'espressione della forza $\mathbf{F}(z)$ esercitata sul cilindretto; *facoltativamente* si calcoli la posizione z_0 nella quale la forza magnetica sul cilindretto è più intensa e il valore $\mathbf{F}(z_0)$ di tale forza.

Svolgimento:

a)

$$\begin{aligned}
 B_z(z) &= \frac{\mu_0}{2} nIR^2 \int_{-\infty}^0 \frac{dz'}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -\frac{\mu_0}{2} nI \left[\frac{z - z'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \right]_{-\infty}^0 = \\
 &= \frac{\mu_0}{2} nI \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right];
 \end{aligned}$$

b)

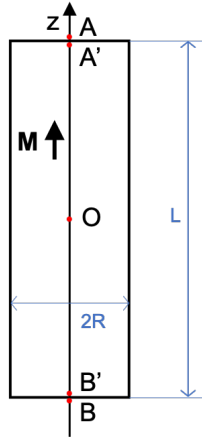
$$\mu_z(z) = V\chi_m H_z(z) = \frac{\pi D^2 h}{4} \chi_m \frac{nI}{2\mu_r} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right];$$

c)

$$\begin{aligned}
 F_z &= \frac{\partial}{\partial z} (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) = \frac{\pi D^2 h}{4} \frac{\mu_0 \chi_m n^2 I^2}{4\mu_r} \frac{\partial}{\partial z} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]^2 = \\
 &= \frac{\pi D^2 h}{4} \frac{\mu_0 \chi_m n^2 I^2}{2\mu_r} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \left[\frac{z^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right], \\
 \frac{dF_z}{dz} = 0 &\quad \longrightarrow \quad z_0 = -\frac{R}{\sqrt{15}}, \quad F_z(z_0) = -2.18 \times 10^{-8} \text{ N.}
 \end{aligned}$$

6.8 Un magnete permanente cilindrico di lunghezza $L = 19$ cm e raggio $R = 2.9$ cm ha magnetizzazione M_z uniforme. Il campo magnetico in prossimità delle basi è $B_A = B_B = 0.17$ T. Si stimino (o si calcolino):

- i valori dei campi $H_A, H_B, B_{A'}, B_{B'}$;



- b) i valori della magnetizzazione M_z e del momento di dipolo magnetico m del cilindro;
 c) i valori dei campi $H_{A'}$, $H_{B'}$, B_O , H_O .

Svolgimento:

a)

$$H_A = H_B = \frac{B_A}{\mu_0} = 135 \text{ kA/m}, \quad B_{A'} = B_{B'} = 170 \text{ mT},$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$;

b)

$$M_z \approx \frac{2B_A}{\mu_0} = 270 \text{ kA/m}, \quad m = M_z \pi R^2 L = 136 \text{ A} \cdot \text{m}^2;$$

il conto esatto (vedi esercizio 6.1) darebbe

$$M_z = \frac{2B_A}{\mu_0} \sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}} = 274 \text{ kA/m}, \quad m = M_z \pi R^2 L = 137 \text{ A} \cdot \text{m}^2;$$

c) con i valori approssimati:

$$H_{A'} = H_{B'} = \frac{B_A}{\mu_0} - M_z = -135 \text{ kA/m}, \quad B_O \approx \mu_0 M_z = 340 \text{ mT}, \quad H_O \approx 0;$$

con i valori esatti:

$$H_{A'} = H_{B'} = \frac{B_A}{\mu_0} - M_z = -138 \text{ kA/m}, \quad B_O = \frac{\mu_0 M_z}{\sqrt{1 + \frac{4R^2}{L^2}}} = 329 \text{ mT}, \quad H_O = 11.9 \text{ kA/m}.$$

6.9 Una sbarra magnetica di lunghezza $L = 67 \text{ cm}$, di sezione $\Sigma = 1.1 \text{ cm}^2$ e massa $m = 0.58 \text{ kg}$ è sospesa per un estremo e immersa in un campo magnetico orizzontale $B = 0.47 \text{ T}$. Se la densità di magnetizzazione della sbarra è $M = 0.89 \text{ MA/m}$ si calcoli:

- a) il momento magnetico μ della sbarra;
- b) l'angolo θ che la sbarra forma con la verticale;
- c) l'energia magnetica $U_m(\theta)$ associata con questa posizione angolare.

Svolgimento:

a)

$$\mu = ML\Sigma = 65.6 \text{ Am}^2;$$

- b) sulla sbarra agiscono e si fanno equilibrio il momento torcente dovuto al campo magnetico $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ e quello dovuto al peso $\mathbf{L} \times m\mathbf{g}/2$:

$$mg\frac{L}{2} \sin \theta = \mu B \cos \theta \quad \longrightarrow \quad \theta = \arctan \frac{2\mu B}{mgL} = 9.18^\circ,$$

dove $g = 9.81 \text{ m/s}^2$;

c)

$$U_m(\theta) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu B \sin \theta = -49.2 \text{ mJ}.$$

6.10 Una sferetta di un materiale magnetico lineare di volume $V = 73 \text{ mm}^3$ è posizionata in un punto in cui $B_{0z} = 0.53 \text{ T}$ e $\partial B_{0z}/\partial z = -9.7 \text{ T/m}$. La pallina è attirata con una forza $F_z = -0.21 \text{ N}$. Assumendo che la sferetta sia uniformemente magnetizzata si calcoli:

- a) la magnetizzazione M indotta dal campo magnetico e il campo H nel materiale;
- b) la suscettività χ del materiale;
- c) il campo magnetico B nel materiale.

Svolgimento:

a)

$$F_z = m \frac{\partial B_{0z}}{\partial z} = VM \frac{\partial B_{0z}}{\partial z} \quad \longrightarrow \quad M = \frac{F_z}{V \partial B_{0z}/\partial z} = 296 \text{ kA/m}.$$

Nella geometria data

$$H = \frac{B_{0z}}{\mu_0} - \frac{M}{3} = 323 \text{ kA/m},$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$;

b)

$$\chi = \frac{M}{H} = 0.918;$$

c)

$$B = \mu_0(H + M) = 0.778 \text{ T}.$$

7 Esercizi sui campi elettromagnetici variabili

7.1 Un tubo cilindrico di rame di raggio $R = 10$ cm, lunghezza $\Delta z = 10$ cm, spessore $\delta = 1$ mm è immerso in un campo magnetico oscillante parallelo all'asse del cilindro $B_z = B_0 \cos \omega t$ con $B_0 = 10$ mT e $\omega = 314$ rad/s. Trascurando gli effetti dell'autoinduzione si calcoli:

- la forza elettromotrice $\mathcal{E}(t)$ che agisce sul rame del tubo;
- la densità di corrente $j(t)$ nella parete del tubo;
- la potenza efficace P_{eff} dissipata nel tubo a causa delle variazioni del campo magnetico.

Svolgimento:

- la legge di Faraday su una circonferenza del cilindro si scrive

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t} = \pi R^2 \omega B_0 \sin \omega t = \mathcal{E}_0 \sin \omega t \quad \mathcal{E}_0 = 98.6 \text{ mV};$$

-

$$j(t) = \sigma_{\text{Cu}} E(t) \quad E(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{2\pi R} = \frac{\omega B_0 R}{2} \sin \omega t$$

dove $E(t)$ è il campo elettrico e $\sigma_{\text{Cu}} \approx 6 \times 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ è la conducibilità del rame. Si ha quindi

$$j(t) = \sigma_{\text{Cu}} \frac{\omega B_0 R}{2} \sin \omega t = j_0 \sin \omega t \quad j_0 = 9.42 \times 10^6 \text{ A/m}^2$$

-

$$P_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 j_0 \delta \Delta z = \frac{\sigma_{\text{Cu}} R^2 \omega^2 B_0^2}{8} 2\pi R \delta \Delta z = 46.5 \text{ W}$$

7.2 Una spira rettangolare piana di resistenza complessiva $R = 3.0 \text{ } \Omega$ ha un lato mobile di lunghezza $L = 13$ cm. La spira è attraversata in direzione normale da un campo di induzione magnetica di intensità $B = 1.0$ T. Al lato mobile è appeso un grave di massa $m = 11$ g. Trascurando gli attriti meccanici e l'autoinduzione, si calcoli:

- la forza elettromotrice V che deve essere inserita nella spira affinché il corpo non cada;
- la forza elettromotrice V' che deve essere inserita nella spira affinché il corpo si muova verso l'alto con velocità costante $v = 0.9$ m/s;
- la potenza P dissipata dal generatore in quest'ultimo caso.

Svolgimento:

- Utilizzando la seconda legge di Laplace

$$\frac{V}{R} LB = mg \quad \longrightarrow \quad V = \frac{Rmg}{LB} = 2.49 \text{ V}$$

dove $g = 9.81 \text{ m/s}^2$;

- b) essendo nulla l'accelerazione del corpo, l'equilibrio delle forze del punto precedente vale ancora. A causa del moto del corpo, però, nel segmento mobile della spira si genera una forza elettromotrice ΔV opposta a V :

$$\Delta V = vBL \quad \longrightarrow \quad V' = V + \Delta V = 2.61 \text{ V};$$

- c)

$$P = V'I = VI + mgv = 2.16 \text{ W}.$$

7.3 Una spira rettangolare di lati $\Delta x = 15 \text{ cm}$ e $\Delta y = 20 \text{ cm}$, resistenza $R = 25 \Omega$ e massa $m = 4.0 \text{ g}$ scivola senza attrito sul piano xy . Al tempo $t = t_0 = 0$ la spira ha velocità $v_x(0) = v_0 = 4.0 \text{ cm/s}$ ed entra nel semipiano $x > 0$ dove è presente un campo magnetico uniforme e costante $B_z = 0.50 \text{ T}$. Si determini:

- la legge oraria della spira $x(t)$;
- la carica totale q che la attraversa;
- l'energia W complessivamente dissipata nella spira per effetto Joule.

Svolgimento:

- a) la forza sulla spira è data dalla seconda legge di Laplace applicata al lato della spira che entra per primo nel campo magnetico:

$$F(t) = m \frac{dv_x(t)}{dt} = i(t)\Delta y B.$$

La corrente è dovuta al flusso tagliato secondo la legge dell'induzione di Faraday:

$$i(t) = \frac{\Delta y v_x(t) B}{R}.$$

Inserendo questa espressione nella precedente e tenendo conto del verso della corrente si ottiene

$$\frac{dv_x}{v_x(t)} = -\frac{(\Delta y)^2 B^2}{mR} dt \quad \longrightarrow \quad \ln \frac{v_x(t)}{v_0} = -\frac{(\Delta y)^2 B^2}{mR} t \quad \longrightarrow \quad v_x(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

dove

$$\tau = \frac{mR}{(\Delta y)^2 B^2} = 10.0 \text{ s}.$$

Prima dell'istante t_1 in cui la spira entra tutta nel campo magnetico e la corrente indotta si annulla

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t) dt = v_0 \tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad (0 < t < t_1).$$

Il valore di t_1 è dato da

$$x(t_1) = \Delta x \quad \longrightarrow \quad t_1 = -\tau \ln \left[1 - \frac{\Delta x}{v_0 \tau}\right] = 4.70 \text{ s}.$$

Dopo t_1 la spira continua a muoversi con velocità costante $v_1 = v_x(t_1) = v_0 e^{-t_1/\tau} = 2.50 \text{ cm/s}$ e

$$x(t) = \Delta x + v_1(t - t_1) \quad (t > t_1);$$

b)

$$q(t) = \int_0^t i(t) dt = \frac{\Delta y B}{R} x(t) \quad \longrightarrow \quad q = q(t_1) = \frac{\Delta y \Delta x B}{R} = \frac{\Phi(B)}{R} = 0.60 \text{ mC};$$

c)

$$W = \int_0^{t_1} i^2(t) R dt = \frac{(\Delta y)^2 B^2}{R} \int_0^{t_1} v_x^2(t) dt = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v_1^2) = 1.95 \mu\text{J}.$$

7.4 Si supponga che i due fili dell'Esercizio 2.2 siano perfettamente conduttori e percorsi da una stessa corrente $I = 130 \text{ mA}$ nei due versi, con densità costante sulle sezioni dei fili. Si determini:

- l'espressione del campo di induzione magnetica \mathbf{B} nel piano dei fili;
- l'induttanza per unità di lunghezza χ del sistema, trascurando il campo all'interno dei fili;
- le forze magnetiche per unità di lunghezza \mathbf{f}_- e \mathbf{f}_+ che i due fili si scambiano.

Svolgimento:

- a) Nel piano dei fili il campo \mathbf{B} ha la sola componente ortogonale ai fili stessi:

$$B_y(x) = B_{y,-} + B_{y,+} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{x+d} - \frac{1}{x-d} \right] = \frac{\mu_0}{\pi} \frac{Id}{(x^2 - d^2)} & \text{fuori dei fili,} \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{(x+d)}{a^2} - \frac{1}{x-d} \right] & \text{nel filo negativo,} \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{x+d} - \frac{(x-d)}{a^2} \right] & \text{nel filo positivo,} \end{cases}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$;

- b) per una lunghezza z unitaria

$$\chi = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{2d-a}{a} = 1.61 \mu\text{H/m};$$

c)

$$\mathbf{f}_- = -I \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_+(-d, 0, z) = -\mathbf{f}_+ = -I \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_-(d, 0, z) = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi d} \hat{\mathbf{x}} = -109 \hat{\mathbf{x}} \text{ nN/m}.$$

7.5

- Si calcoli il campo di induzione magnetica \mathbf{B} all'interno di una bobina toroidale a sezione quadrata con $N = 170$ spire e raggi interno ed esterno $a = 5.0 \text{ cm}$ e $b = 6.0 \text{ cm}$ percorsa dalla corrente I ;
- una seconda bobina con $N' = 100$ avvolgimenti è avvolta attorno al toroide nello stesso verso e può essere collegata in serie alla prima con uno dei suoi due capi a scelta. Si calcoli il coefficiente di autoinduzione L_{tot} del sistema in tutti e due i casi;
- se le due bobine sono scollegate, si determini la tensione $V(t)$ ai capi della seconda quando nella prima scorre una corrente $I(t) = I_0 \cos \omega t$.

Svolgimento:

a) in coordinate cilindriche, con il verso di $\hat{\phi}$ determinato dal verso positivo della corrente,

$$B_{\phi}(\rho) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi\rho} \quad a \leq \rho \leq b$$

dove $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m;

b) per una bobina toroidale

$$L \equiv \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{N}{I} \int_S B_{\phi}(\rho) dS = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 (b-a) \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 (b-a) \ln \frac{b}{a};$$

nei due casi, quindi

$$L_{\text{tot}} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi} (N + N')^2 (b-a) \ln \frac{b}{a} = 26.6 \mu\text{H} & \text{concordi} \\ \frac{\mu_0}{2\pi} (N - N')^2 (b-a) \ln \frac{b}{a} = 1.79 \mu\text{H} & \text{discordi;} \end{cases}$$

c)

$$V(t) = -N' \frac{d\Phi_B}{dt} = \omega \frac{\mu_0}{2\pi} N N' I_0 (b-a) \ln \frac{b}{a} \sin \omega t.$$

7.6 Un circuito piano composto da $N_1 = 31$ spire circolari di raggio $R_1 = 23$ cm è coassiale con un secondo circuito piano composto da $N_2 = 37$ spire circolari di raggio $R_2 = 1.1$ cm e percorso da una corrente $I_2 = 13$ A che si muove con velocità $v_z = 1.7$ m/s lungo l'asse del sistema. Si calcoli:

- il momento magnetico \mathbf{m}_2 del secondo circuito;
- il coefficiente di mutua induzione $M(z)$ dei due circuiti in funzione della posizione relativa z del secondo; si determini il massimo valore M_{max} del coefficiente;
- la forza elettromotrice $\mathcal{E}(z)$ generata nel primo circuito in funzione della posizione relativa z del secondo; si determini il massimo valore \mathcal{E}_{max} della forza elettromotrice.

Svolgimento:

a)

$$m_{2z} = \pm N_2 I_2 \pi R_2^2 = \pm 183 \text{ mA} \cdot \text{m}^2$$

dove vale il segno + o il segno - a seconda che la corrente nel secondo circuito circoli nel verso positivo o negativo rispetto all'asse z ;

b)

$$M = \frac{\Phi_1(\mathbf{B}_2)}{I_2} = \frac{\Phi_2(\mathbf{B}_1)}{I_1} \approx \pm \frac{\mu_0}{2} \frac{N_1 R_1^2}{(R_1^2 + z^2)^{3/2}} N_2 \pi R_2^2$$

dove vale il segno + o il segno - a seconda che i versi dei due circuiti siano concordi o discordi. Si ha il massimo valore assoluto del coefficiente per $z = 0$:

$$M_{\text{max}} = \frac{\pi \mu_0}{2} \frac{N_1 N_2 R_2^2}{R_1} = 1.19 \mu\text{H};$$

c)

$$\mathcal{E}(z) = -\frac{d\Phi_1(\mathbf{B}_2)}{dt} = -I_2 \frac{dM}{dt} = \frac{3\pi\mu_0 I_2 N_1 N_2 R_1^2 R_2^2 v z}{2 (R_1^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Si ha la massima forza elettromotrice nella posizione in cui si azzerava la derivata:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = 0 \quad \longrightarrow \quad z = \pm \frac{R_1}{2}$$

e quindi

$$\mathcal{E}_{\max} = \frac{24\pi\mu_0 I_2 N_1 N_2 R_2^2 v}{\sqrt{5} \cdot 25 R_1^2} = 98.3 \mu\text{V}.$$

7.7 Un cilindro di diametro $D = 9.1$ mm e lunghezza h magnetizzato permanentemente nella direzione dell'asse con $M_z = +0.53$ MA/m è inserito a velocità costante $v_z = +3.7$ m/s in un solenoide retto molto lungo con $n = 11$ spire/cm e resistenza complessiva $R = 6.1 \Omega$. Si calcoli:

- la corrente $I(t)$ indotta nel solenoide;
- la forza magnetica $\mathbf{F}(t)$ esercitata sul cilindro;
- si ripetano i due punti precedenti per il caso in cui il cilindro sia estratto dal solenoide con velocità $-v_z$.

Svolgimento:

a)

$$I(t) = \begin{cases} -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{\mu_0 M_z \pi D^2 n v_z}{4R} = -28.9 \text{ mA} & \left(0 \leq t \leq \frac{h}{v_z}\right) \\ 0 & \left(\frac{h}{v_z} \leq t\right) \end{cases}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m e il segno meno indica che la corrente percorre gli avvolgimenti del solenoide in verso opposto rispetto alla direzione della magnetizzazione;

b) indicando con U l'energia magnetica

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV, \quad \mathbf{F} = +\nabla U.$$

Il campo magnetico \mathbf{B} è la sovrapposizione di due campi entrambi orientati lungo l'asse z . Il primo è quello del cilindro $B_1 = \mu_0 M_z$, mentre il secondo, $B_2 = -\mu_0 n I$, è dovuto alla corrente indotta:

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int B_1^2 dV + \frac{1}{2\mu_0} \int B_2^2 dV + \frac{1}{\mu_0} \int B_1 B_2 dV$$

I primi due integrali non dipendono dalle coordinate spaziali. Il terzo, che è diverso da zero solo nel volume del cilindro interno al solenoide, vale

$$\frac{1}{\mu_0} \int B_1 B_2 dV = -\frac{\mu_0^2 M_z^2 n^2 \pi D^2 v_z}{4R} \frac{\pi D^2}{4} z$$

dove $z = v_z t$. Si ha quindi

$$F_z(t) = + \frac{\partial U}{\partial z} = \begin{cases} -\frac{\mu_0^2 M_z^2 n^2 \pi^2 D^4 v_z}{16R} = -1.38 \text{ mN} & \left(0 \leq t \leq \frac{h}{v}\right) \\ 0 & \left(\frac{h}{v} \leq t\right) \end{cases}$$

e la forza magnetica è diretta lungo l'asse del solenoide verso l'esterno; la potenza $F_z v_z$ spesa dalla forza corrisponde alla potenza Joule $I^2 R$ dissipata negli avvolgimenti del solenoide;

- c) nell'estrazione corrente e forza cambiano verso: la corrente è ora concorde con la magnetizzazione e la forza è verso l'interno del solenoide.

7.8 Un condensatore cilindrico di raggi interno ed esterno $R_1 = 1.9 \text{ cm}$ e $R_2 = 2.3 \text{ cm}$ e lunghezza $L = 1 \text{ m}$ è riempito con un materiale di conduttività $\sigma = 2.0 \times 10^{-12} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$. Il condensatore è caricato ad una tensione $V_0 = 0.22 \text{ kV}$ e disconnesso dal generatore al tempo $t = 0$. Si calcoli:

- a) la capacità C del condensatore;
b) il campo elettrico $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ e la densità di corrente di conduzione $\mathbf{J}_c(t, \mathbf{r})$ all'interno del condensatore;
c) la corrente di spostamento $\mathbf{J}_D(t, \mathbf{r})$ e il campo magnetico $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$.

Svolgimento:

- a) Le linee di forza dei campi sono radiali. Per il teorema di Gauss applicato ad una superficie cilindrica Σ di raggio r e altezza L coassiale e interna al condensatore

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = E_r 2\pi r L = \frac{Q}{\epsilon_0} &\quad \longrightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} \hat{\mathbf{r}} \quad \longrightarrow \\ \longrightarrow \quad C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} = 291 \text{ pF}; \end{aligned}$$

- b) il condensatore è allo stesso tempo una resistenza di valore

$$R = \frac{1}{\sigma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{2\pi r L} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\sigma L} = \frac{\epsilon_0}{\sigma C} = 15.2 \text{ G}\Omega.$$

Evidentemente i due elementi sono sottoposti alla stessa tensione:

$$RI(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad \text{dove} \quad I(t) = -\frac{dQ}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} = -\frac{dt}{\epsilon_0/\sigma}.$$

Si ha quindi $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$ dove $\tau = \epsilon_0/\sigma = 4.43 \text{ s}$. Anche per la tensione vale $V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ e quindi

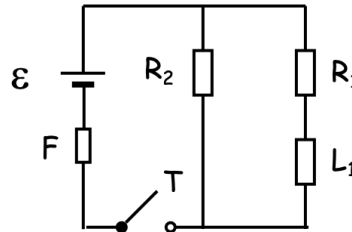
$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{CV(t)}{2\pi\epsilon_0 L r} \hat{\mathbf{r}} = \frac{V_0 e^{-t/\tau}}{r \ln(R_2/R_1)} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{J}_c(t, \mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma V_0 e^{-t/\tau}}{r \ln(R_2/R_1)} \hat{\mathbf{r}};$$

c) la corrente di spostamento è

$$\mathbf{J}_D(t, \mathbf{r}) = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\sigma V_0 e^{-t/\tau}}{r \ln(R_2/R_1)} \hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{J}_c(t, \mathbf{r}) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = 0.$$

7.9 Nel circuito in figura $\mathcal{E} = 48 \text{ V}$, $R_1 = 30 \Omega$, $L_1 = 0.20 \text{ H}$, $R_2 = 60 \Omega$. Il tasto T si chiude a $t = 0$ e il fusibile F è tarato per una corrente $I_0 = 2.0 \text{ A}$. Si calcoli:

- la costante di tempo τ del circuito;
- l'istante t_0 nel quale il fusibile si brucia;
- l'energia U_2 dissipata sulla resistenza R_2 dopo l'istante t_0 .



Svolgimento:

a) L'equazione della corrente nel ramo 1 del circuito si scrive

$$\mathcal{E} = L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 \quad \longrightarrow \quad -\frac{dt}{\tau} = \frac{dI_1}{I_1 - \mathcal{E}/R_1}$$

dove $\tau = L_1/R_1 = 6.67 \text{ ms}$;

b) la corrente che attraversa il fusibile è

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} (1 - e^{-t/\tau}) + \frac{\mathcal{E}}{R_2} \quad \longrightarrow \quad t_0 = -\tau \ln \left[1 - R_1 \left(\frac{I_0}{\mathcal{E}} - \frac{1}{R_2} \right) \right] = 9.24 \text{ ms};$$

c)

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{2} L_1 \left(I_0 - \frac{\mathcal{E}}{R_2} \right)^2 = 96.0 \text{ mJ}.$$

7.10 Un circuito magnetico quadrato di permeabilità magnetica $\mu_r = 980$ ha sezione $\Sigma = 3.9 \text{ cm}^2$ e lunghezza media totale $\ell = 13 \text{ cm}$. Un lato del circuito è mobile ed è mantenuto separato dalla restante C ad una distanza $\delta = 1.9 \text{ mm}$ da una forza $F_{\text{ext}} = 0.57 \text{ N}$. Il circuito magnetico è alimentato da $N = 97$ spire collegate attraverso un interruttore ad un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E}_0 = 1.2 \text{ V}$. La resistenza complessiva del circuito elettrico è $R = 0.67 \Omega$. Si calcoli:

- il valore dell'induttanza L presente nel circuito elettrico;
- l'espressione $I(t)$ della corrente che circola nel circuito elettrico dopo la chiusura dell'interruttore al tempo $t = 0$;

c) l'istante t_0 in cui l'ancoretta si sposta.

Svolgimento:

a) L'equazione di Ampère per il circuito magnetico si scrive

$$2\delta H_0 + \ell H = NI \quad \rightarrow \quad B = \mu_0 H_0 = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\delta \mu_r + \ell} \quad \rightarrow \quad L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 \Sigma}{2\delta \mu_r + \ell} = 1.17 \text{ mH},$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$;

b)

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

dove $\tau = L/R = 1.75 \text{ ms}$;

c) l'energia magnetica del circuito magnetico è

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad \rightarrow \quad F = \frac{dU_m}{d\delta} = \frac{\mu_0 \mu_r^2 N^2 \Sigma}{(2\delta \mu_r + \ell)^2} \frac{\mathcal{E}_0^2}{R^2} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)^2 \equiv F_{\max} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)^2,$$

dove $F_{\max} = 0.956 \text{ N}$. Si ha quindi

$$t_0 = -\tau \ln \left[1 - \sqrt{\frac{F_{\text{ext}}}{F_{\max}}}\right] = 2.59 \text{ ms}.$$

7.11 Una sbarra di materiale conduttore di resistività $\rho = 1.9 \mu\Omega \text{ m}$ ha lunghezza $L = 53 \text{ cm}$, sezione $\Sigma = 3.1 \text{ cm}^2$ e massa $m = 390 \text{ g}$. Partendo da ferma, e rimanendo orizzontale, la sbarra cade scivolando senza attrito lungo due guide parallele distanti L inclinate di un angolo $\theta = 30^\circ$ sull'orizzontale. Le guide sono perfettamente conduttrici e cortocircuitate nel punto più alto. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $\mathbf{B} = 0.43 \hat{\mathbf{z}} \text{ T}$. Trascurando l'autoinduzione si determini:

- l'espressione della forza elettromotrice $\mathcal{E}(v)$ indotta nella sbarra in funzione della velocità v della stessa lungo le guide;
- l'espressione della forza magnetica $\mathbf{F}(v)$ che agisce sulla sbarra in funzione della velocità v della stessa lungo le guide e la sua componente F_s nella direzione delle guide;
- l'andamento in funzione del tempo $v(t)$ della velocità con cui la sbarra scivola lungo le guide.

Svolgimento:

a)

$$\mathcal{E}(v) = LvB \cos \theta;$$

b)

$$\mathbf{F}(v) = \frac{\mathcal{E}(v)}{R} \mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad \text{e} \quad F_s = -\frac{vL^2 B^2 \cos^2 \theta}{R}$$

dove $R = \rho L/\Sigma = 3.25 \text{ m}\Omega$ e \mathbf{L} punta nella direzione della corrente nella sbarra (che circola in verso orario nel circuito visto dall'alto);

c) l'equazione del moto si scrive

$$mg \sin \theta + F_s = m \frac{dv}{dt} \quad \longrightarrow \quad \int_0^v \frac{dv}{v - v_\infty} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt$$

dove

$$\tau = \frac{mR}{L^2 B^2 \cos^2 \theta} = 3.25 \text{ ms} \quad \text{e} \quad v_\infty = g \sin \theta \tau = 16.0 \text{ cm/s.}$$

Si ha quindi

$$v(t) = v_\infty (1 - e^{-t/\tau}).$$

7.12 Un conduttore di resistività $\rho = 8.5 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ ha forma di una corona circolare di raggio interno $a = 2.3 \text{ cm}$, raggio esterno $b = 4.7 \text{ cm}$ e spessore $\delta = .79 \text{ mm}$. Il conduttore è immerso in un campo magnetico uniforme perpendicolare al piano del conduttore e variabile secondo la legge $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 e^{-t/\tau}$ con $\tau = 0.31 \text{ s}$ e $B_0 = 2.8 \text{ T}$ per $t \geq 0$. Si calcolino:

- il massimo valore del campo elettrico $E_{\max}(t_{\max}, \mathbf{r}_{\max})$ all'interno del materiale, l'istante t_{\max} e la posizione \mathbf{r}_{\max} in cui si presenta;
- l'espressione della densità volumica $w(t, \mathbf{r})$ della potenza dissipata nel materiale al tempo t alla generica posizione \mathbf{r} ;
- l'energia U_J complessivamente dissipata nella corona circolare tra $t = 0$ e $t = \infty$;

Svolgimento:

a)

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma(\Gamma)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \longrightarrow \quad E(t, r) = \frac{B(t, r)r}{2\tau}$$

e quindi

$$t_{\max} = 0, \quad r_{\max} = b, \quad E_{\max} = \frac{B_0 b}{2\tau} = 212 \text{ mV/m};$$

b)

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}(t, \mathbf{r})}{\rho} \quad \longrightarrow \quad w(t, \mathbf{r}) = \mathbf{J}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{B_0^2 r^2 e^{-2t/\tau}}{4\tau^2 \rho};$$

c)

$$U_J = \int_0^\infty dt \int_a^b w \delta 2\pi r dr = \frac{B_0^2 \pi (b^4 - a^4) \delta}{16\tau \rho} = 212 \text{ mJ.}$$

7.13 Un grosso solenoide superconduttore ha diametro $D = 6.0 \text{ m}$ e lunghezza $h = 12.5 \text{ m}$ e genera nel centro un campo magnetico $B = 4.0 \text{ T}$ con una corrente $i_0 = 19.1 \text{ kA}$. Nell'approssimazione del solenoide infinito si calcoli:

- la densità n delle spire e il valore dell'induttanza L_s ;
- la densità u_m dell'energia magnetica e la pressione meccanica P_m che si esercita sugli avvolgimenti.

- c) Supponendo che la corrente sia fornita agli avvolgimenti con un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E} = 24$ V, si calcoli il tempo minimo T_m necessario a raggiungere la condizione di lavoro.

Svolgimento:

a)

$$n = \frac{B}{\mu_0 i_0} = 167 \text{ spire/m}, \quad L_s = \mu_0 n^2 \frac{\pi D^2}{4} h = 12.3 \text{ H}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

b)

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = 6.37 \text{ MJ/m}^3, \quad P_m = u_m = 6.37 \text{ MPa};$$

- c) con un generatore di forza elettromotrice \mathcal{E} , la massima velocità di variazione \dot{I}_m della corrente è definita da

$$\mathcal{E} - L_s \dot{I}_m = 0.$$

Il minimo tempo di carica è quindi

$$T_m = \frac{i_0}{\dot{I}_m} = \frac{i_0 L_s}{\mathcal{E}} = 9.82 \text{ ks.}$$

7.14 Un solenoide cilindrico di raggio $\rho_s = 2.3$ cm è formato da $n = 11$ spire/cm di un materiale di conduttività $\sigma_s = 5.9 \times 10^7$ ($\Omega \cdot \text{m}$)⁻¹ avvolte in un singolo strato compatto e percorse da una corrente $I = I_0 \cos \omega t$, dove $I_0 = 2.3$ A e $\omega = 314$ rad/s. Si calcoli:

- a) l'induttanza esterna L del solenoide per unità di lunghezza e la fase ϕ_V della tensione rispetto alla corrente;
- b) il valore massimo $u_{m,s}$ della densità di volume dell'energia magnetica nel solenoide e il valore massimo $u_{e,s}$ della densità di volume dell'energia elettrica.

Un condensatore piano è formato da due lastre circolari di raggio $\rho_c = 8.3$ cm distanti $d = 1.1$ cm la cui differenza di tensione è $V = V_0 \cos \omega t$, dove $V_0 = 0.31$ kV e $\omega = 314$ rad/s. Lo spazio tra le lastre è occupato da un materiale di conduttività $\sigma_c = 5.9 \times 10^{-9}$ ($\Omega \cdot \text{m}$)⁻¹. Trascurando gli effetti di bordo si calcoli:

- c) la capacità C del condensatore e la fase ϕ_I della corrente rispetto alla tensione;
- d) il valore massimo $u_{e,c}$ della densità di volume dell'energia elettrica nel condensatore e il valore massimo $u_{m,c}$ della densità di volume dell'energia magnetica.

Svolgimento:

a)

$$L = \mu_0 n^2 \pi \rho_s^2 = 2.53 \text{ mH/m},$$

la resistenza delle spire per unità di lunghezza del solenoide è data da

$$R_m = \frac{\ell}{\sigma_s S} = \frac{2\pi \rho_s n}{\sigma_s \frac{\pi}{4n^2}} = 4.15 \Omega.$$

Si ha quindi

$$\phi_V = \arctan \frac{\omega L}{R_m} = 10.8^\circ;$$

b) il campo elettrico indotto per effetto Faraday è dato da

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi\rho E_\phi(t) = -\frac{\partial\Phi(\mathbf{B})}{\partial t} = \begin{cases} \pi\rho^2\omega\mu_0 n I_0 \sin\omega t & (\rho \leq \rho_s) \\ \pi\rho_s^2\omega\mu_0 n I_0 \sin\omega t & (\rho \geq \rho_s) \end{cases}$$

In entrambi i casi si ha il massimo valore di E_ϕ per $\rho = \rho_s$:

$$E_{\phi,\max} = \rho_s \omega \mu_0 n I_0 / 2 = 11.5 \text{ mV/m.}$$

Le massime densità di energia magnetica ed elettrica sono quindi

$$u_{m,s} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I_0^2}{2} = 4.02 \text{ J/m}^3, \quad u_{e,s} = \frac{\epsilon_0 E_{\phi,\max}^2}{2} = \frac{\rho_s^2 \omega^2}{4c^2} u_{m,s} = 0.584 \text{ fJ/m}^3.$$

c)

$$C = \frac{\epsilon_0 \pi \rho_c^2}{d} = 17.4 \text{ pF},$$

la resistenza del condensatore è data da

$$R_c = \frac{d}{\sigma_c \pi \rho_c^2} = 8.61 \text{ M}\Omega.$$

Si ha quindi

$$\phi_I = \arctan[\omega C R_c] = \arctan \frac{\sigma_c}{\epsilon_0 \omega} = 2.70^\circ;$$

d) il campo magnetico indotto dalla variazione del campo elettrico è dato da

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi\rho B_\phi(t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial\Phi(\mathbf{E})}{\partial t} = \begin{cases} -\epsilon_0 \mu_0 \pi \rho^2 \omega \frac{V_0}{d} \sin\omega t & (\rho \leq \rho_c) \\ -\epsilon_0 \mu_0 \pi \rho_c^2 \omega \frac{V_0}{d} \sin\omega t & (\rho \geq \rho_c) \end{cases}$$

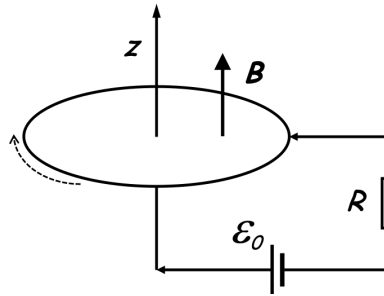
In entrambi i casi si ha il massimo valore assoluto di B_ϕ per $\rho = \rho_c$:

$$|B_{\phi,\max}| = \epsilon_0 \mu_0 \rho_c \omega \frac{V_0}{2d} = 4.10 \text{ pT.}$$

Le massime densità di energia elettrica e magnetica sono quindi

$$u_{e,c} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{\epsilon_0 V_0^2}{2d^2} = 3.54 \text{ mJ/m}^3, \quad u_{m,c} = \frac{B_{\phi,\max}^2}{2\mu_0} = \frac{\rho_c^2 \omega^2}{4c^2} u_{e,c} = 6.69 \times 10^{-18} \text{ J/m}^3.$$

7.15 Un disco metallico di raggio $\rho_0 = 7.3 \text{ cm}$ è libero di ruotare attorno ad un asse ad esso ortogonale e passante per il suo centro (asse z) in presenza di un campo magnetico $B_z = 0.53 \text{ T}$ e di un momento di attrito resistente $M_{\text{res}} = 2.9 \text{ N}\cdot\text{mm}$ indipendente dalla velocità angolare del disco. Tra l'asse metallico e il bordo del disco è collegato un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E}_0 = 9.3 \text{ V}$. La resistenza complessiva del circuito è $R = 4.3 \Omega$.



- a) Trascurando l'autoinduzione, si calcoli la corrente I' che passa nel circuito quando la velocità angolare del disco è $\omega' = -87$ rad/s e se ne specifichi il verso;
- b) la velocità angolare ω_0 del disco in condizioni stazionarie.

Svolgimento:

- a) Quando il disco è in rotazione con $\omega_z < 0$, tra l'asse e il bordo del disco è presente una forza controlettromotrice

$$\mathcal{E}_{\text{Faraday}} = \int_0^{\rho_0} [(\boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{B}] \cdot d\boldsymbol{\rho} = \frac{\omega' \rho_0^2 B_z}{2} = -0.123 \text{ V}$$

l'equazione del circuito è quindi

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\text{Faraday}} = I' R \quad \longrightarrow \quad I' = \frac{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\text{Faraday}}}{R} = 2.13 \text{ A}$$

e la corrente scorre dal centro verso il bordo;

- b) se I_0 è la corrente che scorre a regime dal centro verso il bordo, il moto stazionario del disco è descritto da

$$\int_0^{\rho_0} \boldsymbol{\rho} \times [(I_0 d\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{B})] = -\mathbf{M}_{\text{res}} \quad \longrightarrow \quad I_0 = \frac{2M_{\text{res}}}{\rho_0^2 B_z} = 2.05 \text{ A.}$$

Per il punto precedente deve valere anche

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_{\text{Faraday}}}{R} = \frac{1}{R} \left(\mathcal{E}_0 + \frac{\omega_0 \rho_0^2 B_z}{2} \right) \quad \longrightarrow \quad \omega_0 = \frac{2}{\rho_0^2 B_z} \left[\frac{2RM_{\text{res}}}{\rho_0^2 B_z} - \mathcal{E}_0 \right] = -333 \text{ rad/s.}$$

7.16 Un tubo cilindrico di rame di raggio $r_0 = 2.9$ cm, lunghezza $\Delta z = 17$ cm, spessore $\delta = 1.1$ mm è immerso in un campo magnetico oscillante parallelo all'asse del cilindro $B_z = B_0 \cos \omega t$ con $B_0 = 41$ mT e $\omega = 314$ rad/s. Trascurando gli effetti di bordo si scriva:

- a) l'equazione alla quale risponde la corrente $I(t)$ che scorre nella parete del tubo, determinando il valore delle costanti che vi figurano;
- b) l'espressione della corrente $I(t)$, determinando i valori dell'ampiezza I_0 e della fase ϕ rispetto al campo;
- c) la potenza efficace P_{eff} dissipata nel tubo.

Svolgimento:

a)

$$\mathcal{E}_{\text{Faraday}} - L \frac{dI}{dt} = RI, \quad \mathcal{E}_{\text{Faraday}} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \pi r_0^2 = \omega B_0 \pi r_0^2 \sin \omega t = \mathcal{E}_0 \sin \omega t,$$

$$\mathcal{E}_0 = 34.0 \text{ mV}, \quad L = \frac{\mu_0 \pi r_0^2}{\Delta z} = 19.5 \text{ nH}, \quad R = \rho_{\text{Cu}} \frac{2\pi r_0}{\Delta z \delta} = 16.6 \text{ } \mu\Omega,$$

dove nel calcolo dell'induttanza si è trascurato lo spessore della parete del tubo, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ e $\rho_{\text{Cu}} \approx 1.7 \times 10^{-8} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$;

b)

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi') = I_0 \cos(\omega t + \phi), \quad \text{dove} \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = 1.93 \text{ kA},$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \phi' = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega L}{R} = 1.22 \text{ rad} = 69.7^\circ;$$

c)

$$P_{\text{eff}} = \frac{1}{2} I_0^2 R = 30.7 \text{ W}.$$

7.17 Un lungo cilindro di materiale magnetico vergine di sezione $\Sigma_1 = 0.23 \text{ cm}^2$ è inserito in un lungo solenoide di sezione $\Sigma_2 = 1.3 \text{ cm}^2$ formato da $n = 11$ spire/cm. Attorno al centro del solenoide è avvolta una bobina di $N = 19$ spire collegata ad un galvanometro balistico con resistenza complessiva $R = 0.53 \text{ k}\Omega$. Ad un certo istante si fa passare nel solenoide una corrente $I = 4.7 \text{ A}$, misurando con il galvanometro un impulso di carica di intensità $Q_1 = 0.88 \text{ } \mu\text{C}$. Interrompendo la corrente, il galvanometro misura invece una carica $Q_2 = -0.35 \text{ } \mu\text{C}$. Si calcoli:

- il valore del flusso Φ del campo di induzione magnetica attraverso la bobina durante il passaggio di corrente;
- il valore della magnetizzazione M durante il passaggio di corrente;
- il valore della magnetizzazione residua M_{res} .

Svolgimento:

a)

$$\Phi = Q_1 R = 466 \text{ } \mu\text{T} \cdot \text{m}^2 = 466 \text{ } \mu\text{Wb};$$

b)

$$\Phi = N[B_1 \Sigma_1 + B_2(\Sigma_2 - \Sigma_1)] = \mu_0 N[(nI + M)\Sigma_1 + nI(\Sigma_2 - \Sigma_1)] = \mu_0 N[M\Sigma_1 + nI\Sigma_2]$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$. Si ha quindi

$$M = \frac{Q_1 R - \mu_0 n N I \Sigma_2}{\mu_0 N \Sigma_1} = 820 \text{ kA/m};$$

c)

$$Q_2 R = \mu_0 N M_{\text{res}} \Sigma_1 - \Phi \quad \longrightarrow \quad M_{\text{res}} = \frac{(Q_1 + Q_2) R - \mu_0 n N I \Sigma_2}{\mu_0 N \Sigma_1} = 482 \text{ kA/m.}$$

7.18 Un circuito quadrato rigido di lato $a = 29$ cm percorso da una corrente $I_1 = 8.9$ A è complanare con un filo rettilineo percorso da una corrente $I_2 = 37$ A ed ha due lati paralleli a questo, a distanze $d = 17$ cm e $d + a$. Si calcoli:

- il coefficiente di mutua induzione M tra il quadrato e il filo;
- l'energia di interazione U_{int} dei due circuiti;
- le forze $\mathbf{F}_{1,2}$ agenti.

Svolgimento:

a)

$$M = \frac{\Phi_1(\mathbf{B}_2)}{I_2} = \pm \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d} = \pm 57.7 \text{ nH}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m e vale il segno + se i campi sono concordi all'interno del circuito quadrato;

b)

$$U_{\text{int}} = I_1 \Phi_1(\mathbf{B}_2) = M I_1 I_2 = \pm 19.0 \text{ } \mu\text{J};$$

c) la forza \mathbf{F}_1 sul circuito quadrato è radiale rispetto al filo:

$$F_1 = \mp \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi} \left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right] = \mp 70.8 \text{ } \mu\text{N}, \quad \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1.$$

7.19 Una superficie cilindrica indefinita di raggio $R_0 = 37$ cm è uniformemente carica con densità superficiale $\sigma = 1.1 \text{ } \mu\text{C/m}^2$. La si mette in rotazione attorno al proprio asse a velocità angolare $\omega_0 = 6.7$ krad/s, accelerandolo con la legge oraria $\omega(t) = \alpha t^2/2$, dove $\alpha = 9.7 \text{ rad/s}^3$. Si calcoli:

- il campo magnetico $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ in tutto lo spazio ;
- il lavoro per unità di lunghezza \mathcal{L} necessario per accelerare il cilindro;
- l'espressione del campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ in tutto lo spazio e la densità della corrente di spostamento $\mathbf{J}_D(\mathbf{r}, t)$. Di questa grandezza si calcoli il valore numerico alla superficie del cilindro di raggio R_0 .

Svolgimento:

a) all'interno del cilindro

$$B_z = \mu_0 \sigma \omega R_0 = 3.43 \text{ nT}$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

b) il lavoro speso corrisponde all'energia del campo magnetico:

$$\mathcal{L} = \frac{B_z^2}{2\mu_0} \pi R_0^2 = \frac{\pi \mu_0 \sigma^2 \omega_0^2 R_0^4}{2} = 2.01 \text{ pJ/m};$$

c) esternamente al cilindro il campo elettrico ha una componente radiale indipendente dal tempo

$$E_\rho(R) = \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0 R}.$$

Le componenti azimutali delle due grandezze sono invece diverse da zero solo nell'intervallo di tempo $0 < t < \sqrt{2\omega_0/\alpha} = 37.2$ s. Per $R \leq R_0$

$$E_\phi(R) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial \Phi_R(\mathbf{B})}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \sigma R_0 R \alpha t}{2}, \quad J_D(R) = \epsilon_0 \frac{\partial E_\phi}{\partial t} = -\frac{\sigma R_0 R \alpha}{2c^2}$$

dove $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3.0 \times 10^8$ m/s. Per $R = R_0$

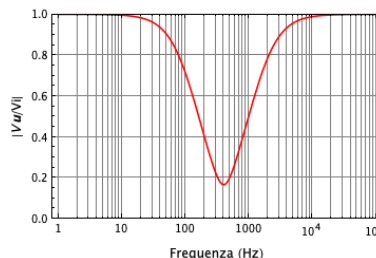
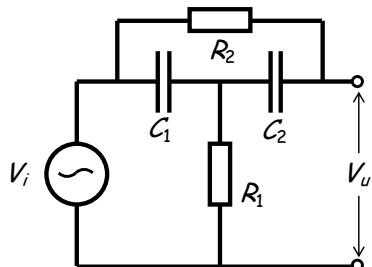
$$J_D(R_0) = -\frac{\sigma R_0^2 \alpha}{2c^2} = 8.12 \times 10^{-24} \text{ A/m}^2.$$

Per $R \geq R_0$

$$E_\phi(R) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial \Phi_{R_0}(\mathbf{B})}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \sigma R_0^3 \alpha t}{2R}, \quad J_D(R) = -\frac{\sigma R_0^3 \alpha}{2c^2 R}.$$

8 Esercizi sui circuiti in corrente alternata

8.1 Per il circuito in figura, di pulsazione ω ,



- determinare l'espressione della tensione di uscita V_u rispetto a quella di ingresso V_i e della pulsazione di risonanza ω_0 ; con $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ e $C_1 = C_2$, si dimensiona il circuito per risuonare alla frequenza di 400 Hz;
- si abbozzi il grafico della risposta in frequenza del circuito; a cosa potrebbe servire un circuito di questo tipo?

Svolgimento:

- indicando con I_1 e I_2 le correnti circolanti in senso orario nelle due maglie $V_i C_1 R_1$ e $C_1 R_2 C_2$, le leggi di Kirchhoff applicate alle due maglie sono

$$\begin{aligned} V_i &= I_1 \frac{1}{i\omega C_1} - I_2 \frac{1}{i\omega C_1} + I_1 R_1 \\ 0 &= -I_1 \frac{1}{i\omega C_1} + I_2 \frac{1}{i\omega C_1} + I_2 R_2 + I_2 \frac{1}{i\omega C_2}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella prima equazione l'espressione di I_1 ricavata dalla seconda

$$I_1 = \left(1 + \frac{C_1}{C_2} + i\omega R_2 C_1 \right) I_2$$

la tensione di uscita può essere scritta come

$$\begin{aligned} V_u = V_i - I_2 R_2 &= V_i \left[1 - \frac{\omega R_2 C_2}{\omega (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) + i(\omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 - 1)} \right] = \\ &= V_i \left[\frac{\omega R_1 (C_1 + C_2) + i(\omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 - 1)}{\omega (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) + i(\omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2 - 1)} \right] \end{aligned}$$

da cui

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}} \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 400^2 R_1 R_2}} = 126 \text{ nF};$$

- il filtro a T con ponte è un circuito semplice comunemente impiegato per deprimere le componenti di frequenza attorno ad ω_0 .

8.2 Un trasformatore ha un avvolgimento primario di $N_1 = 275$ spire e uno secondario con $N_2 = 15$ spire, avvolti entrambi nello stesso verso attorno ad un toro a sezione quadrata di materiale ferromagnetico. Il primario è alimentato da un generatore ideale di forza elettromotrice $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, con $\mathcal{E}_0 = 220$ V e $\omega = 314$ rad/s. Sapendo che l'induttanza del primario è $L_1 = 0.122$ H, e trascurando la dissipazione negli avvolgimenti e nel ferro si determini:

- l'induttanza L_2 del secondario e la mutua induttanza M dei due circuiti;
- con il secondario aperto, la corrente $I_1'(t)$ nel primario e la tensione $V_2'(t)$ ai capi del secondario, giustificando i segni;
- con il secondario chiuso su una resistenza $R = 3.3 \Omega$, le correnti $I_1(t)$ e $I_2(t)$ nei due circuiti e la potenza P spesa dal generatore.

Svolgimento:

a)

$$L_2 = L_1 \frac{N_2^2}{N_1^2} = 363 \mu\text{H} \quad M = \sqrt{L_1 L_2} = L_1 \frac{N_2}{N_1} = 6.65 \text{ mH};$$

b)

$$\mathcal{E}(t) - L_1 \frac{dI_1'}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad I_1'(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L_1} \sin \omega t \quad \text{dove} \quad \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L_1} = 5.74 \text{ A},$$

$$V_2'(t) = -M \frac{dI_1'}{dt} = -\mathcal{E}(t) \frac{N_2}{N_1} = -\mathcal{E}_0 \frac{N_2}{N_1} \cos \omega t \quad \text{dove} \quad \mathcal{E}_0 \frac{N_2}{N_1} = 12.0 \text{ V};$$

c) le equazioni dei due circuiti sono:

$$\mathcal{E}(t) - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} = RI_2$$

e passando alla notazione simbolica vettoriale complessa

$$\vec{\mathcal{E}} - i\omega L_1 \vec{I}_1 - i\omega M \vec{I}_2 = 0 \quad \text{e} \quad -i\omega L_2 \vec{I}_2 - i\omega M \vec{I}_1 = R \vec{I}_2.$$

Ricavando \vec{I}_1 da quest'ultima e sostituendo nella prima

$$\vec{I}_2 = -\frac{\mathcal{E}_0}{R} \frac{N_2}{N_1} = 3.64 \text{ A}, \quad \vec{I}_1 = \mathcal{E}_0 \left(\frac{1}{R} \frac{N_2^2}{N_1^2} + \frac{1}{i\omega L_1} \right) = (0.198 - i 5.74) \text{ A},$$

$$P = \mathcal{E}_0 |\vec{I}_1| \cos \widehat{\vec{\mathcal{E}} \vec{I}_1} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} \frac{N_2^2}{N_1^2} = |\vec{I}_2|^2 R = 43.6 \text{ W}.$$

8.3 Un componente elettrico a due terminali collegato ad un generatore di forza elettromotrice continua $V_0 = 12$ V è attraversato da una corrente continua $I_0 = 2.1$ A. Collegato ad un generatore di forza elettromotrice alternata $\hat{V} = V_0 \cos 2\pi\nu t$ a $\nu = 50$ Hz esso è percorso da una corrente efficace $I_{\text{eff}} = 0.75$ A.

- Si disegni il più semplice schema circuitale del componente;
- si calcolino i valori degli elementi circuitali che compaiono nello schema;
- si determini la fase ϕ_I della corrente alternata rispetto alla tensione.

Svolgimento:

- a) il componente è la serie di una resistenza R e di un'induttanza L ;
 b) dalla misura in continua:

$$R = \frac{V_0}{I_0} = 5.71 \Omega;$$

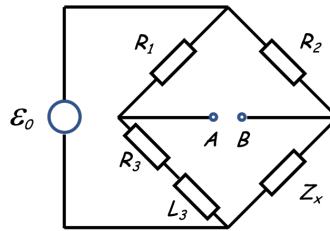
dalla misura in alternata:

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2\nu^2 L^2}} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow L = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{V_0^2}{2I_{\text{eff}}^2} - R^2} = \frac{V_0}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{1}{2I_{\text{eff}}^2} - \frac{1}{I_0^2}} = 31.1 \text{ mH};$$

- c)

$$\phi_I = -\arctan \frac{2\pi\nu L}{R} = -\arctan \sqrt{\frac{I_0^2}{2I_{\text{eff}}^2} - 1} = -59.7^\circ = -1.04 \text{ rad}.$$



8.4 Nel ponte di Wheatstone in figura la differenza di potenziale tra A e B è nulla per qualsiasi frequenza del generatore con i seguenti valori degli elementi circuitali: $R_1 = 247 \Omega$, $R_2 = 137 \Omega$, $R_3 = 107 \Omega$, $L_3 = 157 \text{ mH}$. Si determini l'elemento circuitale incognito.

Svolgimento: La condizione di equilibrio è

$$\frac{R_1}{R_3 + i\omega L_3} = \frac{R_2}{\hat{Z}_x} \quad \rightarrow \quad \hat{Z}_x = \frac{R_2}{R_1} (R_3 + i\omega L_3).$$

L'elemento circuitale incognito è quindi un'induttanza

$$L_x = \frac{R_2}{R_1} L_3 = 87.1 \text{ mH}$$

in serie ad una resistenza

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3 = 59.3 \Omega.$$

8.5 Un circuito è costituito da una resistenza $R = 5.3 \text{ k}\Omega$ in serie ad un condensatore C formato da due armature piane circolari di raggio $R_c = 21 \text{ cm}$ separate da una distanza $d_c = 1.9 \text{ cm}$. Il circuito è alimentato in regime stazionario da un generatore di forza elettromotrice alternata $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ dove $\mathcal{E}_0 = 220 \text{ V}$ e $\omega = 314 \text{ rad/s}$. Si calcoli:

a) l'ampiezza I e la fase ϕ_I della corrente \hat{I} che attraversa il circuito.

Attorno al condensatore, in asse con questo, è posto un solenoide toroidale di raggio medio $R_m = 22$ cm con $N_s = 1400$ spire circolari di sezione $\Sigma_s = 1.1$ cm² e resistenza complessiva $R_s = 63$ m Ω . Assumendo che la mutua induttanza tra i due circuiti abbia effetti trascurabili sul circuito RC si calcoli:

b) la corrente di spostamento \hat{I}_D nel condensatore e l'autoinduttanza L_s del solenoide;

c) l'ampiezza B e la fase ϕ_B del campo magnetico \hat{B} nel solenoide.

Svolgimento:

a)

$$\hat{I} = \frac{\mathcal{E}_0}{R + \frac{1}{i\omega C}} \quad \rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = 4.46 \mu\text{A}, \quad \phi_I = \arctan \frac{1}{\omega RC} \simeq 90^\circ,$$

dove $C = \epsilon_0 \pi R_c^2 / d_c = 64.5$ pF;

b)

$$\hat{I}_D = \hat{I}, \quad L_s = \frac{\mu_0 N_s^2 \Sigma_s}{2\pi R_m} = 196 \mu\text{H},$$

dove $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

c) per la quarta equazione di Maxwell, su un percorso orientato che attraversa il centro del solenoide (e supponendo coerente il verso in cui è avvolto il solenoide)

$$\oint \hat{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi R_m \hat{B} = \mu_0 (\hat{I}_D + N_s \hat{I}_s)$$

dove

$$\hat{I}_s = -\frac{N_s}{R_s} \frac{d\Phi(\hat{\mathbf{B}})}{dt} = -\frac{i\omega N_s \Sigma_s}{R_s} \hat{B}$$

è la corrente nel solenoide dovuta all'effetto Faraday. Dalle ultime due espressioni si ricava

$$\frac{i\omega L_s}{R_s} \hat{B} + \hat{B} = \frac{\mu_0 \hat{I}}{2\pi R_m}.$$

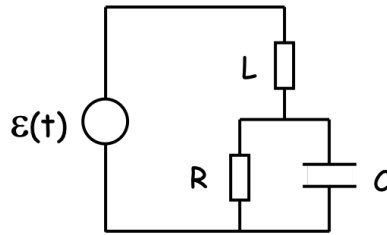
Si ha quindi

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_m \sqrt{1 + \frac{\omega^2 L_s^2}{R_s^2}}} = 1.38 \text{ pT}, \quad \phi_B = -\arctan \frac{\omega L_s}{R_s} = -44.3^\circ,$$

dove la fase è riferita alla corrente nel condensatore. Nel il linguaggio della teoria dei circuiti, l'equazione del circuito del solenoide si scriverebbe come

$$-i\omega L_s \hat{I}_s - i\omega M \hat{I}_D = R_s \hat{I}_s$$

dove $M = L_s / N_s$ è la mutua induttanza tra i due circuiti.



8.6 Nel circuito in figura $L = 5.3 \text{ mH}$, $R = 970 \Omega$, $C = 0.47 \mu\text{F}$, $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, con $\mathcal{E}_0 = 24 \text{ V}$. Si determini:

- la corrente a frequenza zero $\hat{I}(0)$ e la corrente a frequenza infinita $\hat{I}(\infty)$;
- le espressioni dell'impedenza del circuito e della corrente $\hat{Z}(\omega)$ e $\hat{I}(\omega)$;
- la pulsazione di risonanza del circuito ω_0 , la corrispondente corrente alla risonanza $I(\omega_0)$ e la fase della corrente alla risonanza $\phi(\omega_0)$;
- il fattore di merito Q_0 del circuito alla frequenza di risonanza e la larghezza $\Delta\omega$ della curva di risonanza.

Svolgimento:

a)

$$\hat{I}(0) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = 24.7 \text{ mA}, \quad \hat{I}(\infty) = 0;$$

b)

$$\hat{Z}(\omega) = i\omega L - \frac{iR}{\omega C} = \frac{iR \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + \frac{L}{C}}{R + \frac{1}{i\omega C}}, \quad \hat{I}(\omega) = \mathcal{E} \frac{R + \frac{1}{i\omega C}}{iR \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + \frac{L}{C}};$$

c)

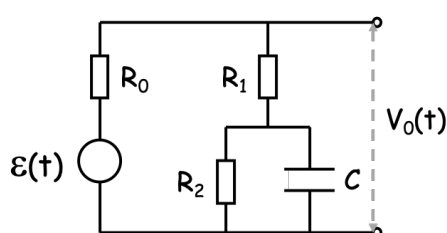
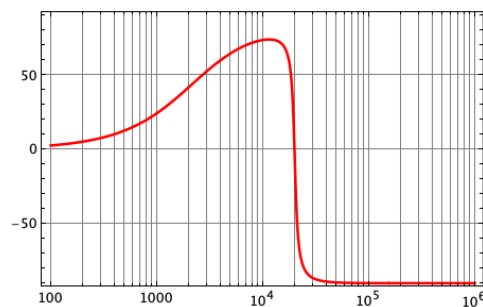
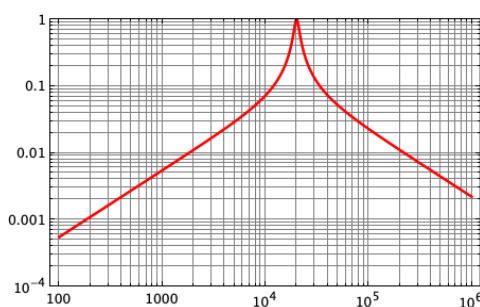
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 20.0 \text{ krad/s},$$

$$I(\omega_0) = \mathcal{E} \sqrt{\frac{R^2 C^2}{L^2} + \frac{C}{L}} = 2.08 \text{ A}, \quad \phi(\omega_0) = -\arctan \frac{1}{\omega_0 RC} = -\arctan \sqrt{\frac{L}{CR^2}} = -6.25^\circ;$$

d)

$$\frac{I(\omega)}{I(\omega_0)} = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)^2}},$$

$$Q_0 = \omega_0 RC = R \sqrt{\frac{C}{L}} = 9.13, \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{1}{RC} = 2.19 \text{ krad}.$$



8.7 Nel circuito in figura $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ con $\mathcal{E}_0 = 24 \text{ V}$, $R_0 = 0.47 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 33 \Omega$, $R_2 = 7.9 \text{ k}\Omega$ e $C = 13 \mu\text{F}$. Si calcolino:

- le correnti erogate dal generatore $\hat{I}(0)$ e $\hat{I}(\infty)$ a frequenze zero e infinito e le corrispondenti tensioni di uscita $\hat{V}_0(0)$ e $\hat{V}_0(\infty)$;
- le espressioni dell'impedenza del circuito $\hat{Z}(\omega)$ e della corrente $\hat{I}(\omega)$;
- le espressioni del modulo della tensione di uscita $|\hat{V}_0(\omega)|$ e della sua fase $\phi(\omega)$; si calcoli la frequenza ν_0 per la quale $\phi(\nu_0)$ è minima e il valore di $\phi(\nu_0)$.

Svolgimento:

a)

$$\hat{I}(0) = \frac{\mathcal{E}_0}{R_0 + R_1 + R_2} = 2.86 \text{ mA}, \quad \hat{I}(\infty) = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{R_0 + R_1} = 47.7 \cos \omega t \text{ mA},$$

$$\hat{V}_0(0) = \mathcal{E}_0 \frac{R_1 + R_2}{R_0 + R_1 + R_2} = 22.7 \text{ V}, \quad \hat{V}_0(\infty) = \hat{\mathcal{E}} \frac{R_1}{R_0 + R_1} = 1.57 \cos \omega t \text{ V};$$

b)

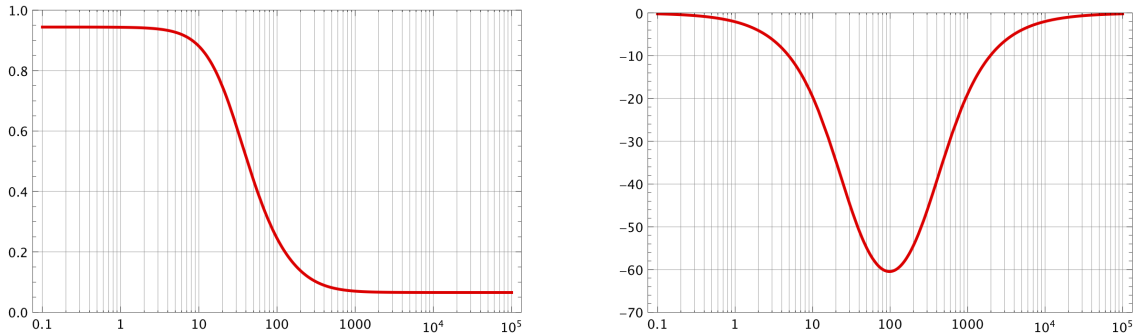
$$\hat{Z}(\omega) = R_0 + R_1 + \frac{R_2}{1 + i\omega R_2 C}, \quad \hat{I}(\omega) = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{\hat{Z}} = \frac{\mathcal{E}_0(1 + i\omega R_2 C)}{(R_0 + R_1)(1 + i\omega R_2 C) + R_2};$$

c)

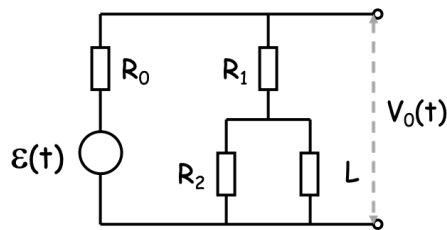
$$\frac{|\hat{V}_0(\omega)|}{\mathcal{E}_0} = \sqrt{\frac{(R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2}{(R_0 + R_1 + R_2)^2 + [\omega(R_0 + R_1)R_2 C]^2}},$$

$$\phi = \arctan \left[\frac{\omega R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \right] - \arctan \left[\frac{\omega(R_0 + R_1)R_2 C}{R_0 + R_1 + R_2} \right],$$

$$\frac{d\phi}{d\omega} = 0 \quad \rightarrow \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi R_2 C} \sqrt{\frac{(R_1 + R_2)(R_0 + R_1 + R_2)}{R_1(R_0 + R_1)}} = 98.2 \text{ Hz}, \quad \phi(\nu_0) = -60.5^\circ.$$



8.8 Nel circuito in figura $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ con $\mathcal{E}_0 = 24 \text{ V}$, $R_0 = 0.47 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 33 \Omega$, $R_2 = 7.9 \text{ k}\Omega$



e $L = 13 \text{ mH}$. Si calcolino:

- le correnti erogate dal generatore $\hat{I}(0)$ e $\hat{I}(\infty)$ a frequenze zero e infinito e le corrispondenti tensioni di uscita $\hat{V}_0(0)$ e $\hat{V}_0(\infty)$;
- le espressioni dell'impedenza del circuito $\hat{Z}(\omega)$ e della corrente $\hat{I}(\omega)$;
- le espressioni del modulo della tensione di uscita $|\hat{V}_0(\omega)|$ e della sua fase $\phi(\omega)$; *facoltativamente* si calcoli la frequenza ν_0 per la quale $\phi(\nu_0)$ è massima e il valore di $\phi(\nu_0)$.

Svolgimento:

a)

$$\hat{I}(0) = \frac{\mathcal{E}_0}{R_0 + R_1} = 47.7 \text{ mA},$$

$$\hat{I}(\infty) = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{R_0 + R_1 + R_2} = 28.6 \cos \omega t \text{ mA},$$

$$\hat{V}_0(0) = \mathcal{E}_0 \frac{R_1}{R_0 + R_1} = 1.57 \text{ V},$$

$$\hat{V}_0(\infty) = \hat{\mathcal{E}} \frac{R_1 + R_2}{R_0 + R_1 + R_2} = 22.7 \cos \omega t \text{ V};$$

b)

$$\hat{Z}(\omega) = R_0 + R_1 + \frac{i\omega L R_2}{R_2 + i\omega L},$$

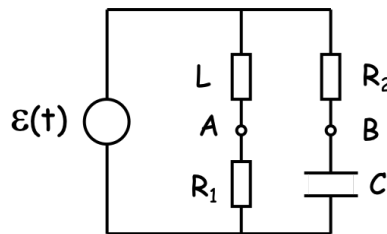
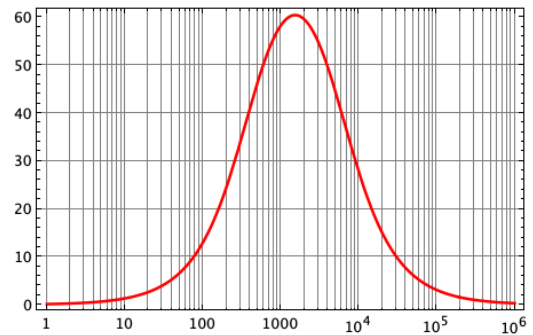
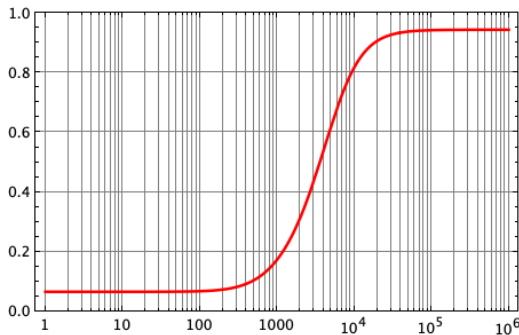
$$\hat{I}(\omega) = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{\hat{Z}} = \frac{\mathcal{E}_0 (R_2 + i\omega L)}{(R_0 + R_1) R_2 + i\omega L (R_0 + R_1 + R_2)};$$

c)

$$\frac{|\hat{V}_0(\omega)|}{\mathcal{E}_0} = \sqrt{\frac{(R_1 R_2)^2 + \omega^2 L^2 (R_1 + R_2)^2}{R_2^2 (R_0 + R_1)^2 + \omega^2 L^2 (R_0 + R_1 + R_2)^2}},$$

$$\phi = \arctan \left[\frac{\omega L (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \right] - \arctan \left[\frac{\omega L (R_0 + R_1 + R_2)}{(R_0 + R_1) R_2} \right],$$

$$\frac{d\phi}{d\omega} = 0 \quad \longrightarrow \quad \nu_0 = \frac{R_2}{2\pi L} \sqrt{\frac{R_1 (R_0 + R_1)}{(R_1 + R_2)(R_0 + R_1 + R_2)}} = 1.53 \text{ kHz}, \quad \phi(\nu_0) = 60.5^\circ.$$



8.9 Per il circuito in figura con $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ si calcoli:

- l'espressione della corrente $\hat{I}(\omega)$ erogata dal generatore in funzione della pulsazione ω ; si calcoli l'ampiezza I e la fase ϕ_I della corrente per $\mathcal{E} = 0.31 \text{ kV}$, $\omega'/2\pi = 50 \text{ Hz}$, $R_1 = 97 \text{ }\Omega$, $R_2 = 91 \text{ }\Omega$, $L = 0.47 \text{ H}$ e $C = 83 \text{ }\mu\text{F}$; *facoltativamente* si calcoli l'espressione della frequenza di risonanza ν_0 e il suo valore;
- l'espressione della differenza di fase $\Delta\phi_I$ tra la corrente nel ramo induttivo e quella nel ramo capacitivo in funzione della pulsazione ω e il suo valore per i valori circuitali dati;
- l'espressione della differenza di potenziale \hat{V}_{AB} tra i punti A e B.

Svolgimento:

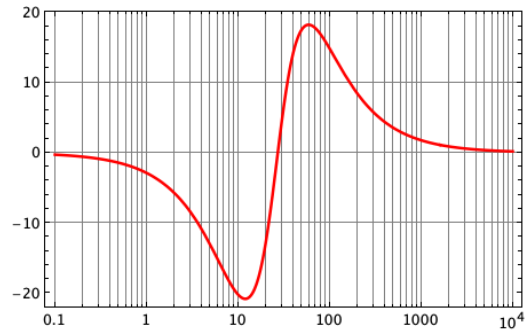
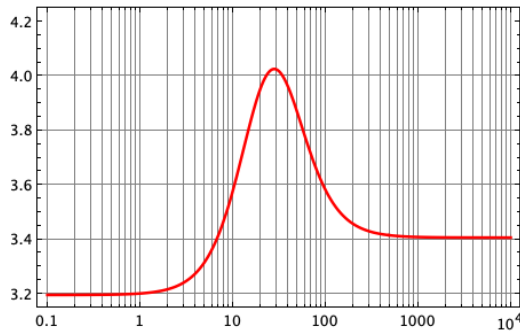
a)

$$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{R_1 + i\omega L} + \frac{\hat{\mathcal{E}}}{R_2 + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{\hat{Z}}, \quad \hat{Z} = \frac{(R_1 + i\omega L) \left(R_2 + \frac{1}{i\omega C} \right)}{R_1 + R_2 + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}},$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L^2} \sqrt{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = 3.86 \text{ A},$$

$$\phi_I = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_1 + R_2} - \arctan \frac{\omega L}{R_1} + \arctan \frac{1}{\omega R_2 C} = 17.6^\circ,$$

$$\phi_I(\nu_0) = 0 \quad \rightarrow \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} \frac{R_1^2 C - L}{R_2^2 C - L}} = 26.1 \text{ Hz};$$



b)

$$\Delta\phi_I = -\arctan \frac{\omega L}{R_1} - \arctan \frac{1}{\omega R_2 C} = -79.5^\circ;$$

c)

$$\hat{V}_{AB} = \frac{\hat{\mathcal{E}} R_1}{R_1 + i\omega L} - \left[\hat{\mathcal{E}} - \frac{\hat{\mathcal{E}} R_2}{R_2 + \frac{1}{i\omega C}} \right].$$

8.10 Un filo rettilineo indefinito si trova sull'asse di un solenoide toroidale a sezione quadrata di raggi interno ed esterno $r_1 = 5.9 \text{ cm}$ e $r_2 = 9.1 \text{ cm}$ e costituito da $N = 470$ spire di filo di rame di sezione $\Sigma = 0.97 \text{ mm}^2$. Si calcoli:

a) il coefficiente di autoinduzione L_s del solenoide e il valore della sua resistenza R_s ;

- b) il coefficiente di mutua induzione M tra il solenoide e il filo e l'equazione differenziale per la corrente I_s che attraversa il solenoide;
- c) la corrente \hat{I}_s (ampiezza I_{s0} e fase ϕ_s) che attraversa il solenoide se la corrente nel filo è $I_f = I_{f0} \cos \omega t$ con $I_{f0} = 29$ A e $\omega = 314$ rad/s.

Svolgimento:

a)

$$L_s = N \frac{\Phi_s(B_s)}{I_s} = \mu_0 \frac{N^2(r_2 - r_1)}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = 613 \mu\text{H}, \quad R_s = \rho_{\text{Cu}} \frac{4N(r_2 - r_1)}{\Sigma} = 1.05 \Omega$$

dove $\rho_{\text{Cu}} = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$;

b)

$$M = N \frac{\Phi_s(B_f)}{I_f} = \mu_0 \frac{N(r_2 - r_1)}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = 1.30 \mu\text{H}, \quad -L_s \frac{dI_s}{dt} \pm M \frac{dI_f}{dt} = I_s R_s,$$

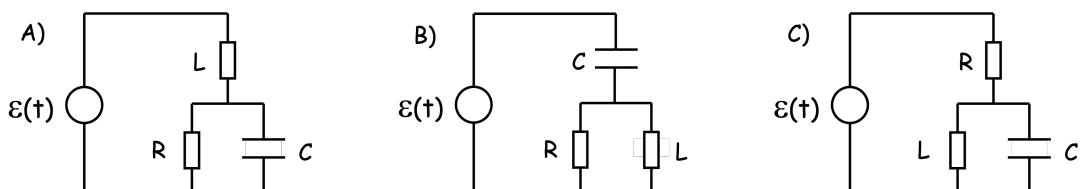
dove vale il segno positivo se i versi dei campi generati da correnti positive nel solenoide e nel filo sono discordi;

c)

$$i\omega L_s \hat{I}_s + \hat{I}_s R_s = \pm i\omega M \hat{I}_f \quad \longrightarrow \quad \hat{I}_s = \frac{\pm i\omega M \hat{I}_f}{R_s + i\omega L_s},$$

$$I_{s0} = \frac{\omega M I_{f0}}{\sqrt{R_s^2 + \omega^2 L_s^2}} = 11.1 \text{ mA}, \quad \phi_s = \pm 90^\circ - \arctan \frac{\omega L_s}{R_s} = \pm 90^\circ - 10.3^\circ.$$

8.11 Per i tre circuiti in figura alimentati da un generatore $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t = \hat{\mathcal{E}}$ si determinino:



- a) le espressioni delle correnti a frequenza nulla $\hat{I}_A(0)$, $\hat{I}_B(0)$ e $\hat{I}_C(0)$ e a frequenza infinita $\hat{I}_A(\infty)$, $\hat{I}_B(\infty)$ e $\hat{I}_C(\infty)$;
- b) le espressioni delle impedenze $\hat{Z}_A(\omega)$, $\hat{Z}_B(\omega)$ e $\hat{Z}_C(\omega)$ e delle frequenze di risonanza ω_A , ω_B e ω_C ;
- c) le espressioni delle correnti alla frequenza di risonanza $\hat{I}_A(\omega_A)$, $\hat{I}_B(\omega_B)$ e $\hat{I}_C(\omega_C)$ e delle loro fasi alla frequenza di risonanza $\phi_A(\omega_A)$, $\phi_B(\omega_B)$ e $\phi_C(\omega_C)$.

Svolgimento:

a)

$$\begin{aligned} \hat{I}_A(0) &= \frac{\mathcal{E}_0}{R}, & \hat{I}_B(0) &= 0, & \hat{I}_C(0) &= \frac{\mathcal{E}_0}{R}, \\ \hat{I}_A(\infty) &= 0, & \hat{I}_B(\infty) &= \frac{\hat{\mathcal{E}}}{R}, & \hat{I}_C(\infty) &= \frac{\hat{\mathcal{E}}}{R}; \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \hat{Z}_A(\omega) &= \frac{R(1 - \omega^2 CL) + i\omega L}{1 + i\omega CR}, & \hat{Z}_B(\omega) &= \frac{\omega L - iR(1 - \omega^2 CL)}{\omega C(R + i\omega L)}, \\ \hat{Z}_C(\omega) &= \frac{R(1 - \omega^2 CL) + i\omega L}{1 - \omega^2 CL}, & \omega_A = \omega_B = \omega_C &= \sqrt{\frac{1}{CL}}; \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \hat{I}_A(\omega_A) &= \hat{\mathcal{E}} \left(\frac{RC}{L} - i\sqrt{\frac{C}{L}} \right), & I_B(\omega_B) &= \hat{\mathcal{E}} \left(\frac{RC}{L} + i\sqrt{\frac{C}{L}} \right), & \hat{I}_C(\omega_C) &= -i0, \\ \phi_A(\omega_A) &= -\arctan \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, & \phi_B(\omega_B) &= \arctan \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, & \phi_C(\omega_C) &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

